

Contrôlabilité de quelques EDPs paraboliques

Armand Koenig

Université Côte d'Azur

5 juin 2018

Séminaire analyse appliquée

Institut de mathématiques de Marseille

Problème de la contrôlabilité

Définition de la contrôlabilité

Ω un ouvert de \mathbb{R}^n , ω un ouvert de Ω et $T > 0$.

Définition (Contrôlabilité la chaleur sur ω en temps T)

Pour toute condition initiale $f_0 \in L^2(\Omega)$, il existe $u \in L^2([0, T] \times \omega)$ tel que la solution f de :

$$\partial_t f - \Delta f = \mathbf{1}_\omega u, \quad f|_{\partial\Omega} = 0, \quad f(0) = f_0$$

vérifie $f(T) = 0$.

Définition de la contrôlabilité

Ω un ouvert de \mathbb{R}^n , ω un ouvert de Ω et $T > 0$.

Définition (Contrôlabilité la chaleur sur ω en temps T)

Pour toute condition initiale $f_0 \in L^2(\Omega)$, il existe $u \in L^2([0, T] \times \omega)$ tel que la solution f de :

$$\partial_t f - \Delta f = \mathbf{1}_\omega u, \quad f|_{\partial\Omega} = 0, \quad f(0) = f_0$$

vérifie $f(T) = 0$.

Théorème (Contrôlabilité de la chaleur¹)

Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^n de classe C^2 , $\omega \subset \Omega$ un ouvert non vide, et $T > 0$. L'équation de la chaleur est contrôlable sur ω en temps T .

1. G. LEBEAU. "Introduction Aux Inégalités de Carleman". In : *Control and Stabilization of Partial Differential Equations*. Séminaires & congrès 29. Paris : Société Mathématique de France, 2015, p. 51–92, A. V. FURSIKOV et O. Y. IMANUVILOV. *Controllability of Evolution Equations*. Lecture Note Series 34. Seoul National University, 1996.

EDPs paraboliques dégénérées

Exemples d'EDP paraboliques dégénérées

Exemples

- Équation de Grushin : $(\partial_t - \partial_x^2 - x^2 \partial_y^2)f = \mathbf{1}_\omega u$
- Équation de Kolmogorov : $(\partial_t - \partial_v^2 + v^2 \partial_x)f = \mathbf{1}_\omega u$

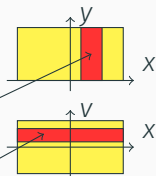
Exemples d'EDP paraboliques dégénérées

Exemples

- Équation de Grushin : $(\partial_t - \partial_x^2 - x^2 \partial_y^2)f = \mathbf{1}_\omega u$
- Équation de Kolmogorov : $(\partial_t - \partial_v^2 + v^2 \partial_x)f = \mathbf{1}_\omega u$

Contrôlable ?

- Grushin : seulement en temps grand si ω
- Kolmogorov : seulement en temps grand si ω



-
2. K. BEAUCHARD, L. MILLER et M. MORANCEY. "2d Grushin-Type Equations : Minimal Time and Null Controllable Data". In : *Journal of Differential Equations* 259.11 (5 déc. 2015), p. 5813–5845
 3. K. BEAUCHARD, P. CANNARSA et R. GUGLIELMI. "Null Controllability of Grushin-Type Operators in Dimension Two". In : *J. Eur. Math. Soc.* 16.1 (2014), p. 67–101

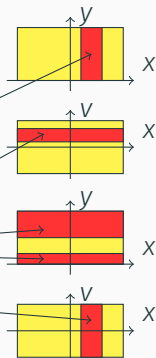
Exemples d'EDP paraboliques dégénérées

Exemples

- Équation de Grushin : $(\partial_t - \partial_x^2 - x^2 \partial_y^2)f = \mathbf{1}_\omega u$
- Équation de Kolmogorov : $(\partial_t - \partial_v^2 + v^2 \partial_x)f = \mathbf{1}_\omega u$

Contrôlable ?

- Grushin : seulement en temps grand si ω^2
- Kolmogorov : seulement en temps grand si ω^3
- Grushin : jamais contrôlable si ω
- Kolmogorov : jamais contrôlable si ω



2. K. BEAUCHARD, L. MILLER et M. MORANCEY. "2d Grushin-Type Equations : Minimal Time and Null Controllable Data". In : *Journal of Differential Equations* 259.11 (5 déc. 2015), p. 5813–5845
3. K. BEAUCHARD, P. CANNARSA et R. GUGLIELMI. "Null Controllability of Grushin-Type Operators in Dimension Two". In : *J. Eur. Math. Soc.* 16.1 (2014), p. 67–101

Non contrôlabilité de l'équation de Grushin : heuristiques

Non contrôlabilité de l'équation de Grushin : heuristiques

- But : nier l'inégalité d'observabilité (équivalente à la contrôlabilité)

$$\int_{\Omega} |f(T, \cdot)|^2 \leq C \int_{[0, T] \times \omega} |f|^2$$

Non contrôlabilité de l'équation de Grushin : heuristiques

- But : nier l'inégalité d'observabilité (équivalente à la contrôlabilité)

$$\int_{\Omega} |f(T, \cdot)|^2 \leq C \int_{[0, T] \times \omega} |f|^2$$

- λ_n première valeur propre de $-\partial_x^2 + (nx)^2$ avec conditions de Dirichlet sur $(-1, 1)$; v_n la fonction propre associée
- $v_n(x)e^{iny}$ est une fonction propre de $-\partial_x^2 - x^2\partial_y^2$ pour la valeur propre λ_n

Non contrôlabilité de l'équation de Grushin : heuristiques

- But : nier l'inégalité d'observabilité (équivalente à la contrôlabilité)

$$\int_{\Omega} |f(T, \cdot)|^2 \leq C \int_{[0, T] \times \omega} |f|^2$$

- λ_n première valeur propre de $-\partial_x^2 + (nx)^2$ avec conditions de Dirchlet sur $(-1, 1)$; v_n la fonction propre associée
- $v_n(x)e^{iny}$ est une fonction propre de $-\partial_x^2 - x^2\partial_y^2$ pour la valeur propre λ_n
- Approximation de $-\partial_x^2 + (nx)^2$ on $(-1, 1)$ par lui-même sur \mathbf{R} : on s'attend à $v_n \sim \left(\frac{n}{4\pi}\right)^{1/4} e^{-nx^2/2}$ et $\lambda_n \sim n$
- Inégalité d'observabilité pour $f(t, x, y) = \sum a_n v_n(x) e^{iny - \lambda_n t}$, heuristiques $\lambda_n = n$ et $\int v_n v_m = 1$:

$$\int_T \left| \sum a_n e^{-nT} e^{iny} \right|^2 dy \leq C \int_{[0, T] \times \omega_y} \left| \sum a_n e^{-nt} e^{iny} \right|^2 dt dy$$

Théorème

Let $H = \{\sum_{n \geq 0} a_n e^{iny}, \sum |a_n|^2 < +\infty\}$ et $D \sum a_n e^{iny} = \sum n a_n e^{iny}$. Soit ω un ouvert strict du cercle unité.

L'équation $\partial_t f + Df = 1_\omega u$ n'est jamais contrôlable.

Théorème

Let $H = \{\sum_{n \geq 0} a_n e^{iny}, \sum |a_n|^2 < +\infty\}$ et $D \sum a_n e^{iny} = \sum n a_n e^{iny}$. Soit ω un ouvert strict du cercle unité.

L'équation $\partial_t f + Df = 1_\omega u$ n'est jamais contrôlable.

Inégalité d'observabilité $f(t, y) = \sum a_n e^{-nt} e^{iny}$:

$$\int_T \left| \sum a_n e^{-nT} e^{iny} \right|^2 dy \leq C \int_{[0, T] \times \omega} \left| \sum a_n e^{-nt} e^{iny} \right|^2 dt dy$$

C'est l'inégalité d'observabilité approchée pour Grushin !

Démonstration de la non-contrôlabilité du modèle

Inégalité d'observabilité avec $f(t, y) = \sum a_n e^{-nt} e^{iny}$:

$$\sum |a_n|^2 e^{-2nT} \leq C \int_{[0, T] \times \omega} \left| \sum a_n e^{-nt} e^{iny} \right|^2 dt dy$$

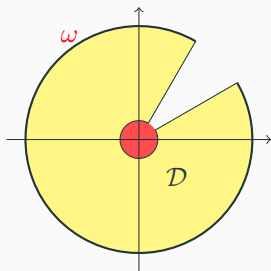
Démonstration de la non-contrôlabilité du modèle

Inégalité d'observabilité avec $f(t, y) = \sum a_n e^{-nt} e^{iny}$:

$$\sum |a_n|^2 e^{-2nT} \leq C \int_{[0, T] \times \omega} \left| \sum a_n e^{-nt} e^{iny} \right|^2 dt dy$$

Soit $z = e^{-t+iy} = \mu + i\nu$ et $f(z) = \sum_{n \geq 1} a_n z^{n-1}$

$$\begin{aligned} & \int_{z \in D(0, e^{-T})} |f(z)|^2 d\mu d\nu \\ & \leq \pi \sum |a_n|^2 e^{-2nT} \\ & \leq \pi C \int_{z \in \mathcal{D}} |f(z)|^2 d\mu d\nu \end{aligned}$$



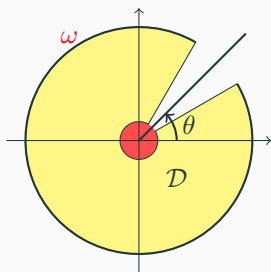
Démonstration de la non-contrôlabilité du modèle

Inégalité d'observabilité avec $f(t, y) = \sum a_n e^{-nt} e^{iny}$:

$$\sum |a_n|^2 e^{-2nT} \leq C \int_{[0, T] \times \omega} \left| \sum a_n e^{-nt} e^{iny} \right|^2 dt dy$$

Soit $z = e^{-t+iy} = \mu + i\nu$ et $f(z) = \sum_{n \geq 1} a_n z^{n-1}$

$$\begin{aligned} & \int_{z \in D(0, e^{-T})} |f(z)|^2 d\mu d\nu \\ & \leq \pi \sum |a_n|^2 e^{-2nT} \\ & \leq \pi C \int_{z \in \mathcal{D}} |f(z)|^2 d\mu d\nu \end{aligned}$$



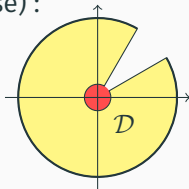
Faux d'après le théorème de Runge (prendre $f_k \rightarrow 1/z$ uniformément sur tout compact de $\mathbf{C} \setminus e^{i\theta} \mathbf{R}_+$) □

Démonstration de la non-contrôlabilité de l'équation de Grushin

Différences entre le modèle et Grushin

Inégalité d'observabilité « holomorphe » (qu'on sait fausse) :

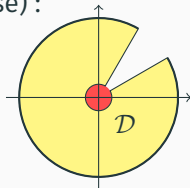
$$\sum |a_n|^2 e^{-2nT} \leq C \int_{\mathcal{D}} \left| \sum a_n z^{n-1} \right|^2 d\mu d\nu$$



Différences entre le modèle et Grushin

Inégalité d'observabilité « holomorphe » (qu'on sait fausse) :

$$\sum |a_n|^2 e^{-2nT} \leq C \int_{\mathcal{D}} \left| \sum a_n z^{n-1} \right|^2 d\mu d\nu$$



Inégalité d'observabilité pour Grushin

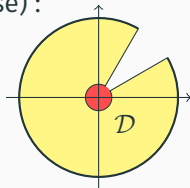
- Let $\lambda_n = n + \rho_n$ and $z = \mu + i\nu$:

$$\sum |a_n|^2 e^{-2nT} e^{-2\rho_n T} \leq C \int_{-1}^1 \int_{\mathcal{D}} \left| \sum v_n(x) a_n z^{n-1} |z|^{\rho_n} \right|^2 d\mu d\nu dx$$

Différences entre le modèle et Grushin

Inégalité d'observabilité « holomorphe » (qu'on sait fausse) :

$$\sum |a_n|^2 e^{-2nT} \leq C \int_{\mathcal{D}} \left| \sum a_n z^{n-1} \right|^2 d\mu d\nu$$



Inégalité d'observabilité pour Grushin

- Let $\lambda_n = n + \rho_n$ and $z = \mu + i\nu$:

$$\sum |a_n|^2 e^{-2nT} e^{-2\rho_n T} \leq C \int_{-1}^1 \int_{z \in \mathcal{D}} \left| \sum v_n(x) a_n z^{n-1} |z|^{\rho_n} \right|^2 d\mu d\nu dx$$

- Solution :
 - $e^{-2\rho_n T}$ à gauche : pas un problème
 - Considérer x comme un paramètre
 - Démontrer

$$\left| \sum v_n(x) |\zeta|^{\rho_n} a_n z^n \right|_{L^\infty(\mathcal{D})} \leq C \left| \sum a_n z^n \right|_{L^\infty(U)}$$

Théorème (LeRoy & Lindelöf 1906)

Soit $\gamma : \{\Re(z) > 0\} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe bornée. Alors

$K(z) = \sum_{n>0} \gamma(n)z^n$ s'étend analytiquement sur $\mathbb{C} \setminus [1, +\infty)$.

L'estimation technique : analyse complexe

Théorème (LeRoy & Lindelöf 1906)

Soit $\gamma : \{\Re(z) > 0\} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe bornée. Alors

$K(z) = \sum_{n>0} \gamma(n)z^n$ s'étend analytiquement sur $\mathbb{C} \setminus [1, +\infty)$.

- + affaiblir légèrement les hypothèses sur γ et démontrer de la continuité en γ
- démontrer que $v_n(x)|\zeta|^{\rho_n} = \gamma(n)$ (analyse spectrale)

L'estimation technique : analyse complexe

Théorème (LeRoy & Lindelöf 1906)

Soit $\gamma : \{\Re(z) > 0\} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe bornée. Alors

$K(z) = \sum_{n>0} \gamma(n)z^n$ s'étend analytiquement sur $\mathbb{C} \setminus [1, +\infty)$.

- + affaiblir légèrement les hypothèses sur γ et démontrer de la continuité en γ
- démontrer que $v_n(x)|\zeta|^{\rho_n} = \gamma(n)$ (analyse spectrale)
- avec $f(z) = \sum a_n z^n$:

$$\begin{aligned} \sum \gamma(n) a_n z^n &= \sum \gamma(n) \overbrace{\frac{1}{2i\pi} \oint_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}} d\zeta}^{a_n} z^n \\ &= \frac{1}{2i\pi} \oint_{\partial D} \frac{1}{\zeta} K\left(\frac{z}{\zeta}\right) f(\zeta) d\zeta \end{aligned}$$

- changer de chemin d'intégration :

$$\sum \gamma(n) a_n z^n = \frac{1}{2i\pi} \oint_{\mathcal{C}} \frac{1}{\zeta} K\left(\frac{z}{\zeta}\right) f(\zeta) d\zeta$$

L'inégalité technique : de l'analyse spectrale

Théorème

Il existe γ satisfaisant les hypothèses du théorème de LeRoy-Lindelöf tel que :

$$v_n(x)|\zeta|^{p_n} = \gamma(n)$$

L'inégalité technique : de l'analyse spectrale

Théorème

Il existe γ satisfaisant les hypothèses du théorème de LeRoy-Lindelöf tel que :

$$v_n(x)|\zeta|^{p_n} = \gamma(n)$$

Démonstration.

- Asymptotique pour la première valeur propre de $-\partial_x^2 + (\alpha x)^2$ avec α complexe
- pour tout $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$:

$$\rho_\alpha \underset{\substack{|\alpha| \rightarrow \infty \\ |\arg(\alpha)| \leq \theta}}{\sim} \frac{4}{\sqrt{\pi}} \alpha^{3/2} e^{-\alpha}$$

L'inégalité technique : de l'analyse spectrale

Théorème

Il existe γ satisfaisant les hypothèses du théorème de LeRoy-Lindelöf tel que :

$$v_n(x)|\zeta|^{p_n} = \gamma(n)$$

Démonstration.

- Asymptotique pour la première valeur propre de $-\partial_x^2 + (\alpha x)^2$ avec α complexe
- pour tout $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$:

$$\rho_\alpha \underset{\substack{|\alpha| \rightarrow \infty \\ |\arg(\alpha)| \leq \theta}}{\sim} \frac{4}{\sqrt{\pi}} \alpha^{3/2} e^{-\alpha}$$

- pour $v_\alpha(x)$: inégalité d'Agmon

□

Équation de Kolmogorov

$$(\partial_t - \partial_v^2 + v^2 \partial_x)g = 0$$

Idée de la démonstration

- si $g = g_n(t, v)e^{inx}$, alors $(\partial_t - \partial_v^2 + inv^2)g_n = 0$
- $g_n \sim e^{-\sqrt{in}v^2/2 - \sqrt{in}t}$

$$(\partial_t - \partial_v^2 + v^2 \partial_x)g = 0$$

Idée de la démonstration

- si $g = g_n(t, v)e^{inx}$, alors $(\partial_t - \partial_v^2 + inv^2)g_n = 0$
- $g_n \sim e^{-\sqrt{in}v^2/2 - \sqrt{in}t}$
- pour la variable x , Kolmogorov $\sim \partial_t + \sqrt{i}(-\Delta)^{1/4}$
- moins dissipatif que $\partial_t + \sqrt{-\Delta}$

$$(\partial_t - \partial_v^2 + v^2 \partial_x)g = 0$$

Idée de la démonstration

- si $g = g_n(t, v)e^{inx}$, alors $(\partial_t - \partial_v^2 + inv^2)g_n = 0$
- $g_n \sim e^{-\sqrt{in}v^2/2 - \sqrt{in}t}$
- pour la variable x , Kolmogorov $\sim \partial_t + \sqrt{i}(-\Delta)^{1/4}$
- moins dissipatif que $\partial_t + \sqrt{-\Delta}$
- idée : optique géométrique : prendre $e^{-x^2/2h + ix\xi_0/h}$
- asymptotiques : méthode du point col

Conclusion

Quelques problèmes ouverts

- Autres domaines ω ?
- Techniques par séries de Fourier : ça marche, mais seulement pour les domaines rectangulaires

Quelques problèmes ouverts

- Autres domaines ω ?
- Techniques par séries de Fourier : ça marche, mais seulement pour les domaines rectangulaires
- Démonstration très spécifique au potentiel x^2 dans l'équation $(\partial_t - \partial_x^2 - x^2 \partial_y^2)f = 1_\omega u$
- Le théorème de LeRoy-Lindelöf nécessite de l'analyse spectrale semi-classique avec h complexe (analyse spectrale d'un opérateur non-autoadjoint)

Quelques problèmes ouverts

- Autres domaines ω ?
- Techniques par séries de Fourier : ça marche, mais seulement pour les domaines rectangulaires
- Démonstration très spécifique au potentiel x^2 dans l'équation $(\partial_t - \partial_x^2 - x^2 \partial_y^2)f = 1_\omega u$
- Le théorème de LeRoy-Lindelöf nécessite de l'analyse spectrale semi-classique avec h complexe (analyse spectrale d'un opérateur non-autoadjoint)

That's all folks!