Contrôlabilité locale d'un bac d'eau

Armand Koenig

9 novembre 2021

Séminaire MAC

Introduction

Controle de système linéaire d'EDO
$A \in \mathbb{R}^{d\times d}$, $B \in \mathbb{R}^{d\times m}$, $T > 0$, $X_T \in \mathbb{R}^d$. NSC pour qu'on puisse trouver $u \in L^2(0, T; \mathbb{R}^m)$ tel que si

$$\dot{X}(t) = AX(t) + Bu(t), \quad X(0) = 0$$

on a $X(T) = X_T$.

Controle de système linéaire d'EDO
$A \in \mathbb{R}^{d\times d}$, $B \in \mathbb{R}^{d\times m}$, $T > 0$, $X_T \in \mathbb{R}^d$. NSC pour qu'on puisse trouver $u \in L^2(0, T; \mathbb{R}^m)$ tel que si

$$\dot{X}(t) = AX(t) + Bu(t), \quad X(0) = 0$$

on a $X(T) = X_T$.

Théorème

Vrai ssi $X_T \in \mathrm{Image}([B\ AB\ \ \ldots\ \ A^{d-1}B])$.

Contrôlabilité locale en temps fini

$\dot{X} = f(X,u)$ avec $f(0,0) = 0$. Est-ce que pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que si $|T| < \epsilon$, $|X_0| < \eta$, $|X_T| < \eta$, on peut trouver $|u|_{L^\infty(O,T)} < \epsilon$ tel que $X(T) = X_T$?

Théorème

Oui si l'équation linearisée est contrôlable.

La réciproque n'est pas vraie.

Obstruction quadratique

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = u \\ \dot{x}_2 = x_1^2 \end{cases}$$

$\dot{x}_2 \geq 0$: pas de contrôlabilité.

Obstruction en temps petit

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = u \\ \dot{x}_2 = x_1 \\ \dot{x}_3 = x_1^2 - x_2^2 \end{cases}$$

$x_2(0) = x_2(T) = 0$, alors $\int_0^T x_2^2 \leq (T/\pi)^2 \int_0^T \dot{x}_2^2$ (Poincaré), donc si T est petit, $x_3(T) \geq x_3(0)$: pas de contrôlabilité locale en temps petit.

Une autre obstruction en temps petit ?

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = u \\ \dot{x}_2 = x_1 \\ \dot{x}_3 = x_1^3 + x_2^2 \end{cases}$$

Contrôlabilité locale… mais pas si on demande $|u|_{W^{1,\infty}} \ll 1$!

[Beauchard-Marbach, Quadratic obstructions to small-time local controllability for scalar-input systems, 2018,…]

Contrôle d’EDP

Equation de Burgers

$$\partial_t f - \partial_{xx} f + f\partial_x f = u(t), \quad (t,x) \in (0,T) \times (0,1)$$

Linéarisé contrôlable en temps T arbitrairement petit. Équation non-linéaire non localement contrôlable en temps petit. [Marbach, An obstruction to small-time local null controllability for a viscous Burgers' equation, 2018]

Contrôle bilinéaire de l'équation de Schrödinger

$$i\partial_t f = -\partial_x^2 f - u(t)\mu(x)f, \quad (t,x) \in (0,T) \times (0,1)$$

Pour certains μ, contrôlabilité locale en temps grand autour de l'état fondamental, mais pas contrôlabilité locale en temps petit. [Beauchard-Morancey, Local controllability of 1D Schrödinger equations with bilinear control and minimal time, 2014, ...]

Équation de KdV

$$\partial_t f + \partial_x f + \partial_x^3 f + f\partial_x f = 0, \quad (t,x) \in (0,T) \times (O,L)$$
$$f(x=0) = f(x=L) = 0, \partial_x f(x=L) = u(t)$$

Pour certains L, contrôlabilité locale en temps grand, mais non-contrôlabilité locale en temps petit. [Cerpa, Control of a Korteweg-de Vries equation : a tutorial, 2007, ..., Coron-K-Nguyen, On the small-time local controllability of a KdV system for critical lengths, 2020]

Bac d’eau

Système du bac d'eau

$$\begin{cases} \partial_t H + \partial_x(vH) = 0, & (t,x) \in (0,T) \times (0,\pi) \\ \partial_t v + \partial_x(gH + v^2/2) = -u(t), & (t,x) \in (0,T) \times (0,\pi) \\ v(t,0) = v(t,\pi) = 0 & t \in (0,T) \\ \ddot{D}(t) = u(t) & t \in (0,T) \end{cases}$$

- $H(t,x)$: hauteur de la surface de l'eau par raport au fond du bac
- $v(t,x)$: champ de vitesse de l'eau à la surface
- $D(t)$: position du bac d'eau
- $u(t)$: accélération du bac d'eau ; contrôle

Système du bac d'eau

$$\begin{cases} \partial_t H + \partial_x(vH) = 0, & (t,x) \in (0,T) \times (0,\pi) \\ \partial_t v + \partial_x(gH + v^2/2) = -u(t), & (t,x) \in (0,T) \times (0,\pi) \\ v(t,0) = v(t,\pi) = 0 & t \in (0,T) \\ \ddot{D}(t) = u(t) & t \in (0,T) \end{cases}$$

- $H(t,x)$: hauteur de la surface de l'eau par raport au fond du bac
- $v(t,x)$: champ de vitesse de l'eau à la surface
- $D(t)$: position du bac d'eau
- $u(t)$: accélération du bac d'eau ; contrôle

Équation linéarisée autour de $H = 1$, $v = 0$

$$\begin{cases} \partial_t h + \partial_x v = 0, & (t,x) \in (0,T) \times (0,\pi) \\ \partial_t v + \partial_x h = -u(t), & (t,x) \in (0,T) \times (0,\pi) \\ v(t,0) = v(t,\pi) = 0 & t \in (0,T) \end{cases}$$

$h(t,\pi - x) = -h(t,x)$, $v(t,\pi - x) = v(t,x)$; pas contrôlable. Mais bouger le bac d'eau en gardant la surface de l'eau plate est possible en temps $T > \pi$.

Contrôlabilité locale pour le bac d'eau ?

Théorème (Contrôle par méthode du retour, Coron 2002)

Contrôlabilité locale en temps grand : il existe $T > 0$, $\eta > 0$ tel que si

$$\begin{aligned} &|H_0 - 1|_{C^1} + |v_0|_{C^1} < \eta, \\ &|H_1 - 1|_{C^1} + |v_1|_{C^1} < \eta, \\ &|D_1 - D_0| < \eta \end{aligned}$$

alors il existe une trajectoire avec $H(t=0) = H_0$, $H(t=T) = H_1$, $v(t=0) = v_0$, $v(t=T) = v_1$, $D(0) = D_0$, $D(T) = D_1$, $\dot{D}(0) = \dot{D}(T) = 0$.

Théorème (Contrôle par méthode du retour, Coron 2002)

Contrôlabilité locale en temps grand : il existe $T > 0$, $\eta > 0$ tel que si

$$\begin{aligned}
&|H_0 - 1|_{C^1} + |v_0|_{C^1} < \eta, \\
&|H_1 - 1|_{C^1} + |v_1|_{C^1} < \eta, \\
&|D_1 - D_0| < \eta
\end{aligned}$$

alors il existe une trajectoire avec $H(t=0) = H_0$, $H(t=T) = H_1$, $v(t=0) = v_0$, $v(t=T) = v_1$, $D(0) = D_0$, $D(T) = D_1$, $\dot{D}(0) = \dot{D}(T) = 0$.

Théorème (Non-contrôlabilité locale en temps pas assez grand, Coron-K-Nguyen 2021)

Pour un certain $T > \pi$, non-contrôlabilité locale avec contrôles $H^{3/2}$ petits : il existe $T > \pi$ et $\eta > 0$ tel que si $H(t=0) = H(t=T) = 1$, $v(t=0) = v(t=T) = 0$, $\dot{D}(0) = \dot{D}(T) = 0$, et si $|u|_{H^{3/2}} < \eta$, alors $u = 0$.

Idée de la démonstration : $(H, v) \approx$ linéarisé $+$ quadratique, et le terme quadratique est $\geq c|u|^2_{H^{-1}}$.

Linéarisé

$$\begin{aligned}
&\partial_t h_1 + \partial_x v_1 = 0\\
&\partial_t v_1 + \partial_x h_1 = -u(t)\\
&v_1(t,0) = v_1(t,\pi) = 0
\end{aligned}$$

Terme quadratique

$$\begin{aligned}
&\partial_t h_2 + \partial_x v_2 = -\partial_x(h_1 v_1) \\
&\partial_t v_2 + \partial_x h_2 = -\partial_x(v_1^2/2) \\
&v_2(t,0) = v_2(t,\pi) = 0
\end{aligned}$$

Lemme

$$(h_2(t,\cdot),\phi) + (v_2(t,\cdot),\psi) = \int_{[0,t]^2} K_{t,\phi,\psi}(s_1,s_2)u(s_1)u(s_2)\,\mathrm{d}s_1\,\mathrm{d}s_2$$

pour un certain noyau $K_{t,\phi,\psi}$ qui se calcule explicitement.

Formule pour le noyau (ne pas lire)

Avec $\Phi(x) = (\phi(x) + \psi(x))/2$ pour $0 < x < \pi$ et $(\phi(-x) - \psi(-x))/2$ pour $-\pi < x < 0$,

$K_{t,\phi,\psi}(s_1, s_2) =$

$$\begin{cases} -\int_0^{-2t+2s_2} \overline{\Phi}(s+t-s_2)\,\mathrm{d}s + 2(t-s_2)\overline{\Phi}(t-s_2) - 4(t-s_2)\overline{\Phi}(t-s_1) \\ \qquad \text{si } 2t-\pi < s_1+s_2 < 2t \\ -\int_{2\pi-2t+s_2+s_1}^{s_2-s_1} \overline{\Phi}(s-s_2+t)\,\mathrm{d}s + (4t-\pi-3s_2-s_1)\overline{\Phi}(t-s_2) - (\pi+2t-3s_2+s_1)\overline{\Phi}(t-s_1) \\ \qquad \text{si } 2t-2\pi < s_1+s_2 < 2t-\pi \\ -\int_0^{2\pi-2t+2s_2} \overline{\Phi}(s+t-s_2)\,\mathrm{d}s + (\pi+2t-2s_2)\overline{\Phi}(t-s_2) - (-\pi+4t-4s_2)\overline{\Phi}(t-s_1) \\ \qquad \text{si } 2t-3\pi < s_1+s_2 < 2t-2\pi \end{cases}$$

Lemme

Soit $\Phi(x) = (\phi(x) + \psi(x))/2$ *pour* $0 < x < \pi$ *et* $(\phi(-x) - \psi(-x))/2$ *pour* $-\pi < x < 0$. *Si* $\pi < t < 3\pi/2$ *et si le contrôle* u *amène le linéarisé de* 0 *à* 0 *(à part peut-être déplacer le bac),*

$$(h_2(t,\cdot),\phi) + (v_2(t,\cdot),\psi) = \int_{[0,t-\pi]^2} K^{\mathrm{red}}_{t,\phi,\psi}(s_1,s_2)u(s_1)u(s_2)\,\mathrm{d}s_1\,\mathrm{d}s_2$$

avec

$$K^{\mathrm{red}}_{t,\phi,\psi}(s_1,s_2) = 3(\pi - |s_2 - s_1|)\left(\overline{\Phi}(t - s_1 \vee s_2) - \overline{\Phi}(t - s_1 \wedge s_2)\right)$$

Choix de Φ :
$\Phi(x) = e^{2ix}$ (on considère le second mode de (h_2, v_2).)

Un exemple simple
Si $\int_a^b u(s)\,\mathrm{d}s = 0$, et $U(s) = \int_a^s u(s')\,\mathrm{d}s'$,

$$\int_{[a,b]^2} |s_1 - s_2| u(s_1) u(s_2)\,\mathrm{d}s_1\,\mathrm{d}s_2 = -2|U|^2_{L^2(a,b)}$$

Démonstration.
IPP en s_1, IPP en s_2, et $\partial_{s_1 s_2}|s_1 - s_2| = -2\delta_{s_1=s_2}$. $\square$

Un exemple simple

Si $\int_a^b u(s)\,\mathrm{d}s = 0$, et $U(s) = \int_a^s u(s')\,\mathrm{d}s'$,

$$\int_{[a,b]^2} |s_1 - s_2| u(s_1) u(s_2)\,\mathrm{d}s_1\,\mathrm{d}s_2 = -2|U|^2_{L^2(a,b)}$$

Démonstration.
IPP en s_1, IPP en s_2, et $\partial_{s_1 s_2}|s_1 - s_2| = -2\delta_{s_1=s_2}$. □

Lemme

Pour t assez proche de π, $K^{\mathrm{red}}_{t,\phi,\psi}(s_1, s_2) \approx c|s_1 - s_2|$

Lemme

Pour t assez proche de π, et $U(s) = \int_0^s u(s')\,\mathrm{d}s'$

$$(h_2(t,\cdot),\phi) + (v_2(t,\cdot),\psi) = -2c\big(1 + O(t-\pi)\big)|U|^2_{L^2(0,t-\pi)}$$

Situation actuelle

- $(h, v) \approx \underbrace{(h_1, v_1)}_{\text{linéaire en } u} + \underbrace{(h_2, v_2)}_{\text{quadratique en } u}$
- si $(h_1, v_1)(t, \cdot) = 0$ et t assez proche de π, alors un certain mode de (h_2, v_2) a un coefficient $\geq c|U|_{L^2}^2$.

Situation actuelle

- $(h, v) \approx \underbrace{(h_1, v_1)}_{\text{linéaire en } u} + \underbrace{(h_2, v_2)}_{\text{quadratique en } u}$
- si $(h_1, v_1)(t, \cdot) = 0$ et t assez proche de π, alors un certain mode de (h_2, v_2) a un coefficient $\geq c|U|_{L^2}^2$.

Démonstration du théorème.

- Si u amène 0 à 0, trouver $\tilde{u}$ proche de u qui amène le *linéarisé* de 0 à 0 (étude de contrôlabilité du linéarisé) : $|U - \tilde{U}|_{L^\infty} \leq C|U|_{L^\infty}|u|_{L^\infty}$.
- $|(h, v)(u) - (h_1, v_1)(u) - (h_2, v_2)(u)|_{H^{-2}} \leq C|U|_{L^\infty}^2 |u|_{L^2}$
- Si $|u|_{H^s}$ est petit pour s assez grand, l'erreur entre $(h, v)(u)$ et $(h_2, v_2)(\tilde{u})$ ne peut pas contrer la positivité de $(h_2(\tilde{u}, t, \cdot), \phi) + (v_2(\tilde{u}, t, \cdot), \psi)$ (inégalités d'interpolations). $\square$

Question
Positivité de Q_a :

$$Q_a(U) = \int_{-a}^{a} \cos(s)(U(s))^2 \,\mathrm{d}s - \frac{1}{2\pi} \int_{-a}^{a} U(s)\,\mathrm{d}s \int_{-a}^{a} \cos(s)U(s)\,\mathrm{d}s \text{ ?}$$

- $Q_a(U)$ = partie réelle du second mode de (h_2, v_2) avec contrôle U' (à quelques détails près).
- Si Q_a coercive, bac d'eau pas localement contrôlable en temps $\pi + a$ avec des contrôles petits en norme $H^{3/2}$.

Question
Positivité de Q_a :

$$Q_a(U) = \int_{-a}^{a} \cos(s)(U(s))^2\,\mathrm{d}s - \frac{1}{2\pi}\int_{-a}^{a} U(s)\,\mathrm{d}s \int_{-a}^{a} \cos(s)U(s)\,\mathrm{d}s\ ?$$

- $Q_a(U) =$ partie réelle du second mode de (h_2, v_2) avec contrôle U' (à quelques détails près).
- Si Q_a coercive, bac d'eau pas localement contrôlable en temps $\pi + a$ avec des contrôles petits en norme $H^{3/2}$.

Lemme

Q_a coercive si $0 < a \leq \pi/2 - 2e^{-9\pi^2/4} \approx \pi/2 - 5 \cdot 10^{-10}$ mais pas pour tout $0 < a < \pi/2$!

Démonstration.
Se placer sur $L^2(\cos(s)\,\mathrm{d}s)$; constater que sur un espace de codimension 2 stable, $Q_a = \text{Identité}$; calculer explicitement la matrice 2×2 sur l'orthogonal, et en étudier la positivité. □

Conclusion

- Un déplacement qui est physiquement naturel est possible sur le linéarisé mais pas sur l'équation non-linéaire.
- Remplacer la condition $|u|_{H^{3/2}}$ petit par $|u|_{H^1}$ petit ?
- Temps exact pour la contrôlabilité locale de l'équation non-linéaire ?

- Un déplacement qui est physiquement naturel est possible sur le linéarisé mais pas sur l'équation non-linéaire.
- Remplacer la condition $|u|_{H^{3/2}}$ petit par $|u|_{H^1}$ petit ?
- Temps exact pour la contrôlabilité locale de l'équation non-linéaire ?

That's all folks!