# Contrôlabilité à zéro des systèmes paraboliques-hyperboliques

Armand Koenig

23 mars 2021

Dauphine | PSL
UNIVERSITÉ PARIS
CEREMADE
UMR 7534

# Introduction

$\Omega$ domaine de $\mathbb{R}^n$, $\omega$ un ouvert de $\Omega$ and $T > 0$.

**Définition (Contrôlabilité à zéro de l'équation de la chaleur sur $\omega$ en temps $T$)**

Pour toute condition initiale $f_0 \in L^2(\Omega)$, il existe un contrôle $u \in L^2([0, T] \times \omega)$ tel que la solution $f$ de :

$$\partial_t f - \Delta f = 1_\omega u, \quad f_{|\partial\Omega} = 0, \quad f(0) = f_0$$

vérifie $f(T, \cdot) = 0$ sur $\Omega$.

$\Omega$ domaine de $\mathbb{R}^n$, $\omega$ un ouvert de $\Omega$ and $T > 0$.

**Définition (Contrôlabilité à zéro de l'équation de la chaleur sur $\omega$ en temps $T$)**

Pour toute condition initiale $f_0 \in L^2(\Omega)$, il existe un contrôle $u \in L^2([0,T] \times \omega)$ tel que la solution $f$ de :

$$\partial_t f - \Delta f = \mathbb{1}_\omega u, \quad f_{|\partial\Omega} = 0, \quad f(0) = f_0$$

vérifie $f(T,\cdot) = 0$ sur $\Omega$.

**Théorème (Contrôlabilité à zéro de la chaleur (Lebeau & Robbiano 1995, Fursikov & Imanuvilov 1996))**

*$\Omega$ un ouvert connexe borné de classe $C^2$ de $\mathbb{R}^n$, $\omega$ un ouvert non vide de $\Omega$, et $T > 0$. L'équation de la chaleur est contrôlable à zéro sur $\omega$ en temps $T$.*

L'équation :

$$\partial_t f(t,x) + A\partial_x f(t,x) - B\partial_x^2 f(t,x) + Kf(t,x) = \mathbb{1}_{\omega} u(t,x), \quad (t,x) \in [0,+\infty[ \times \mathbb{T}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix},\ D + D^* \text{ définie positive;} \quad A = \begin{pmatrix} A' & * \\ * & * \end{pmatrix},\ A' = A'^*.$$

Couplage équations paraboliques et équations de transport

$$f = \begin{pmatrix} f_h \\ f_p \end{pmatrix},\ \begin{cases} (\partial_t + A'\partial_x + K_{11}) f_h(t,x) + (A_{12}\partial_x + K_{12}) f_p(t,x) = \mathbb{1}_{\omega} u_h(t,x) \\ (\partial_t - D\partial_x^2 + A_{22}\partial_x + K_{22}) f_p(t,x) + (A_{21}\partial_x + K_{21}) f_h(t,x) = \mathbb{1}_{\omega} u_p(t,x) \end{cases}$$

Question

Es-ce que pour tout $f_0 \in L^2(\mathbb{T}, \mathbb{C}^d)$ il existe $u \in L^2([0,T] \times \omega, \mathbb{C}^d)$ tel que $f(T,\cdot) = 0$ ? Et si on impose $u_h = 0$ (ou $u_p = 0$) ?

# Les résultats

**Théorème (Beauchard-K-Le Balc'h 2019)**

*$\omega$ un intervalle ouvert de $\mathbb{T}$.*

$$T^* = \frac{2\pi - \text{longueur}(\omega)}{\min_{\mu \in \mathrm{Sp}(A')} |\mu|}$$

*Alors*

1. *le système n'est pas contrôlable à zéro sur $\omega$ en temps $T < T^*$,*
2. *le système est contrôlable à zéro sur $\omega$ en temps $T > T^*$.*

Temps minimal $=$ temps minimal pour l'équation de transport
Dans le cas

$$\partial_t f_h + A' \partial_x f_h = u_h \mathbf{1}_\omega$$

Solutions libres $=$ somme de fonctions se déplaçant à vitesse $\mu_k \in \mathrm{Sp}(A')$.

**Théorème (Contrôle hyperbolique, $D = I$ et $K = 0$, Beauchard-K-Le Balc'h 2020)**

$$f = \begin{pmatrix} f_h \\ f_p \end{pmatrix}, \quad \begin{cases} (\partial_t + A'\partial_x) f_h(t,x) + A_{12}\partial_x f_p(t,x) = 1_\omega u_h(t,x) \\ (\partial_t - \partial_x^2 + A_{22}\partial_x) f_p(t,x) + A_{21}\partial_x f_h(t,x) = 0 \end{cases}$$

*Contrôlabilité en temps $T > T^*$ ssi* $\mathrm{Vect}\{A_{22}^i A_{21} v, i \in \mathbb{N}, v \in \mathbb{C}^{d_h}\} = \mathbb{C}^{d_p}$

**Théorème (Contrôle parabolique et $K = 0$, Beauchard-K-Le Balc'h 2020)**

$$f = \begin{pmatrix} f_h \\ f_p \end{pmatrix}, \quad \begin{cases} (\partial_t + A'\partial_x) f_h(t,x) + A_{12}\partial_x f_p(t,x) = 0 \\ (\partial_t - D\partial_x^2 + A_{22}\partial_x) f_p(t,x) + A_{21}\partial_x f_h(t,x) = 1_\omega u_p(t,x) \end{cases}$$

*Contrôlabilité en temps $T > T^*$ si* $\mathrm{Vect}\{A'^i A_{12} v, i \in \mathbb{N}, v \in \mathbb{C}^{d_p}\} = \mathbb{C}^{d_h}$ *pour les conditions initiales qui sont $H^{d_1+1}$ à moyenne nulle.*

Navier-Stokes

$\rho$ : densité du fluide. $v$ : vitesse du fluide. $a, \gamma, \mu > 0$.

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \partial_x(\rho v) = 1_\omega u_1(t,x) \ \text{ sur } [0,T] \times \mathbb{T} \\ \rho(\partial_t v + v\partial_x v) + \partial_x(a\rho^\gamma) - \mu\partial_x^2 v = 1_\omega u_2(t,x) \ \text{ sur } [0,T] \times \mathbb{T} \end{cases}$$

Linéarisé autour d'états stationnaires $(\bar\rho, \bar v) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^*$ :

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \bar v \partial_x \rho + \bar\rho \partial_x v = 1_\omega u_1(t,x) \ \text{ sur } [0,T] \times \mathbb{T} \\ \partial_t v + \bar v \partial_x v + a\bar\rho^{\gamma-2}\partial_x \rho - \frac{\mu}{\rho}\partial_x^2 v = 1_\omega u_2(t,x) \ \text{ sur } [0,T] \times \mathbb{T} \end{cases}$$

Navier-Stokes

$\rho$ : densité du fluide. $v$ : vitesse du fluide. $a, \gamma, \mu > 0$.

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \partial_x(\rho v) = 1_\omega u_1(t,x) \text{ sur } [0,T] \times \mathbb{T} \\ \rho(\partial_t v + v\partial_x v) + \partial_x(a\rho^\gamma) - \mu\partial_x^2 v = 1_\omega u_2(t,x) \text{ sur } [0,T] \times \mathbb{T} \end{cases}$$

Linéarisé autour d'états stationnaires $(\bar\rho, \bar v) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^*$ :

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \bar v\partial_x \rho + \bar\rho\partial_x v = 1_\omega u_1(t,x) \text{ sur } [0,T] \times \mathbb{T} \\ \partial_t v + \bar v\partial_x v + a\bar\rho^{\gamma-2}\partial_x\rho - \frac{\mu}{\rho}\partial_x^2 v = 1_\omega u_2(t,x) \text{ sur } [0,T] \times \mathbb{T} \end{cases}$$

- [Ervedoza-Guerrero-Glass-Puel 2012] : équation sur $(0, L)$, contrôle frontière sur $(\rho, v)$ en temps $T > L/|\bar v|$
- [Chowdhury-Mitra-Ramaswamy-Renardy 2014] : contrôle sur la vitesse en temps $T > 2\pi/|\bar v|$ pour les conditions initiales $(\rho_0, v_0) \in H^1 \times L^2$.
- [Beauchard-K-Le Balc'h 2020] avec $A = \begin{pmatrix} \bar v & \bar\rho \\ a\bar\rho^{\gamma-2} & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mu/\rho \end{pmatrix}$ : contrôle sur la vitesse en temps $T > (2\pi - \text{longueur}(\omega))/|\bar v|$ pour les conditions initiales $H^2 \times H^2$.

# Démonstration

Composantes de Fourier

$$(-B\partial_x^2 + A\partial_x)Xe^{inx} = n^2\left(B + \frac{i}{n}A\right)Xe^{inx}$$

Spectre de $-B\partial_x^2 + A\partial_x$

$$\mathrm{Sp}(-B\partial_x^2 + A\partial_x) = \left\{n^2\,\mathrm{Sp}\left(B + \frac{i}{n}A\right)\right\}$$

Composantes de Fourier

$$(-B\partial_x^2 + A\partial_x)Xe^{inx} = n^2\left(B + \frac{i}{n}A\right)Xe^{inx}$$

Spectre de $-B\partial_x^2 + A\partial_x$

$$\mathrm{Sp}(-B\partial_x^2 + A\partial_x) = \left\{n^2\,\mathrm{Sp}\left(B + \frac{i}{n}A\right)\right\}$$

Théorie perturbative

$\lambda_{nk}$ valeurs propres de $B + \frac{i}{n}A$. Perturbation de $B$ : $\lambda_{nk} \to \lambda_k \in \mathrm{Sp}(B)$

- Si $\lambda_k \neq 0$, $n^2\lambda_{nk} \underset{n\to+\infty}{\sim} n^2\lambda_k$ : fréquences paraboliques
- Si $\lambda_k = 0$, $n^2\lambda_{nk} \underset{n\to+\infty}{\sim} in\mu_k$ : fréquences hyperboliques

Composantes de Fourier

$$(-B\partial_x^2 + A\partial_x)Xe^{inx} = n^2\left(B + \frac{i}{n}A\right)Xe^{inx}$$

Spectre de $-B\partial_x^2 + A\partial_x$

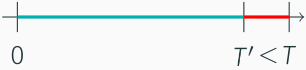
$$\mathrm{Sp}(-B\partial_x^2 + A\partial_x) = \left\{n^2\,\mathrm{Sp}\left(B + \frac{i}{n}A\right)\right\}$$

Théorie perturbative

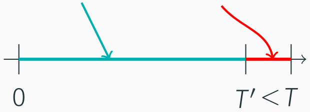
$\lambda_{nk}$ valeurs propres de $B + \frac{i}{n}A$. Perturbation de $B$ : $\lambda_{nk} \to \lambda_k \in \mathrm{Sp}(B)$

- Si $\lambda_k \neq 0$, $n^2\lambda_{nk} \underset{n\to+\infty}{\sim} n^2\lambda_k$ : fréquences paraboliques
- Si $\lambda_k = 0$, $n^2\lambda_{nk} \underset{n\to+\infty}{\sim} in\mu_k$ : fréquences hyperboliques
- solution libre $= \sum X_{nk}e^{inx-n^2\lambda_{nk}t} \approx \underbrace{\sum X_{nk}e^{inx-n^2\lambda_k t}}_{\text{parabolique}} + \underbrace{\sum X_{nk}e^{inx-in\mu_k t}}_{\text{hyperbollique}}$
- Bien posé si $\Re(\lambda_k) > 0$ et $\mu_k \in \mathbb{R}$
- Pas contrôlable en temps petit

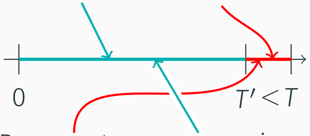
Découpler le système et contrôler

- 

## Découpler le système et contrôler

- Pour $u_h$, trouver $u_p$ qui contrôle les fréquences paraboliques en temps $T$
- 

## Découpler le système et contrôler

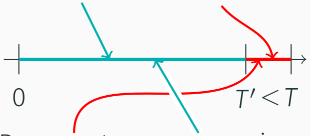
- Pour $u_h$, trouver $u_p$ qui contrôle les fréquences paraboliques en temps $T$
- 

- Pour $u_p$, trouver $u_h$ qui contrôle les fréquences hyperboliques en temps $T$

# Stratégie de contrôle



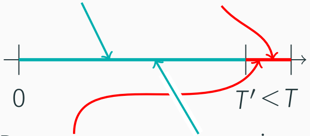
## Découpler le système et contrôler

- Pour $u_h$, trouver $u_p$ qui contrôle les fréquences paraboliques en temps $T$
- 

- Pour $u_p$, trouver $u_h$ qui contrôle les fréquences hyperboliques en temps $T$
- Si les deux étapes concordent, OK
- Forcer les deux problèmes à s'accorder en choisissant $u_p$ régulier et en utilisant l'alternative de Fredholm (perte d'un espace de codimension finie)

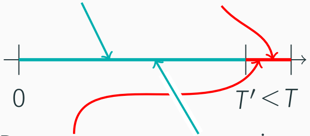
# Stratégie de contrôle 

## Découpler le système et contrôler

- Pour $u_h$, trouver $u_p$ qui contrôle les fréquences paraboliques en temps $T$
- 

- Pour $u_p$, trouver $u_h$ qui contrôle les fréquences hyperboliques en temps $T$
- Si les deux étapes concordent, OK
- Forcer les deux problèmes à s'accorder en choisissant $u_p$ régulier et en utilisant l'alternative de Fredholm (perte d'un espace de codimension finie)
- Étape 1 : contrôle à zéro d'une équation parabolique en temps $T - T' > 0$
- Étape 2 : contrôle exact d'une équation hyperbolique en temps $T'$. Ok si $T' > T^*$

## Découpler le système et contrôler

- Pour $u_h$, trouver $u_p$ qui contrôle les fréquences paraboliques en temps $T$
- 

- Pour $u_p$, trouver $u_h$ qui contrôle les fréquences hyperboliques en temps $T$
- Si les deux étapes concordent, OK
- Forcer les deux problèmes à s'accorder en choisissant $u_p$ régulier et en utilisant l'alternative de Fredholm (perte d'un espace de codimension finie)
- Étape 1 : contrôle à zéro d'une équation parabolique en temps $T - T' > 0$
- Étape 2 : contrôle exact d'une équation hyperbolique en temps $T'$. Ok si $T' > T^*$
- Reste un espace de dimension finie à traiter : argument de compacité-unicité

# Nouveauté par rapport à Lebeau-Zuazua



Systèmes de tailles arbitraires

- Stratégie décrite : Lebeau-Zuazua (1998) pour systèmes linéaires de thermoélasticité (onde-chaleur couplées)
- Notre travail : généralisation à des systèmes de tailles arbitraires

## Systèmes de tailles arbitraires

- Stratégie décrite : Lebeau-Zuazua (1998) pour systèmes linéaires de thermoélasticité (onde-chaleur couplées)
- Notre travail : généralisation à des systèmes de tailles arbitraires
- Difficulté : valeurs propres et vecteurs propres de $B + \frac{i}{n}A$ se comportent mal lorsque $n \to +\infty$
- Solution : se passer de valeurs propres et de vecteurs propres
- Il suffit des *projections propres totales* : sommes de projections propres associées à des valeurs propres proches (théorie perturbative de Kato…)

$$-\frac{1}{2i\pi}\oint_\Gamma (M-z)^{-1}\,\mathrm{d}z = \begin{array}{l}\text{Projection sur les espaces propres associées}\\ \text{à des valeurs propres de } M \text{ à l'intérieur de } \Gamma\end{array}$$

# Conclusion

Systèmes parabolique-transport $\simeq$ transport

- contrôlabilité dictée par les composantes de transport

Systèmes parabolique-transport $\simeq$ transport

- contrôlabilité dictée par les composantes de transport

Problèmes ouverts

- domaine général ?
- moins de contrôles que d'équations ?
- coefficient non constants ?
- ...

Merci !