

Contrôlabilité de quelques équations aux dérivées partielles paraboliques peu diffusives

Soutenance de thèse

Direction : Gilles Lebeau

Armand Koenig

23 octobre 2019

UCA, LJAD

Introduction

Contexte et définition du problème

Contrôlabilité d'équations aux dérivées partielles

Ω domaine de \mathbb{R}^n , ω un ouvert de Ω and $T > 0$.

Définition (Contrôlabilité à zéro de l'équation de la chaleur sur ω en temps T)

Pour toute condition initiale $f_0 \in L^2(\Omega)$, il existe un contrôle $u \in L^2([0, T] \times \omega)$ tel que la solution f de :

$$\partial_t f - \Delta f = \mathbf{1}_\omega u, \quad f|_{\partial\Omega} = 0, \quad f(0) = f_0$$

vérifie $f(T, \cdot) = 0$ sur Ω .

Contrôlabilité d'équations aux dérivées partielles

Ω domaine de \mathbb{R}^n , ω un ouvert de Ω and $T > 0$.

Définition (Contrôlabilité à zéro de l'équation de la chaleur sur ω en temps T)

Pour toute condition initiale $f_0 \in L^2(\Omega)$, il existe un contrôle $u \in L^2([0, T] \times \omega)$ tel que la solution f de :

$$\partial_t f - \Delta f = \mathbf{1}_\omega u, \quad f|_{\partial\Omega} = 0, \quad f(0) = f_0$$

vérifie $f(T, \cdot) = 0$ sur Ω .

Théorème (Contrôlabilité à zéro de la chaleur (Lebeau & Robbiano 1995, Fursikov & Imanuvilov 1996))

*Ω un ouvert borné de classe C^2 de \mathbb{R}^n , ω un ouvert non vide de Ω , et $T > 0$.
L'équation de la chaleur est contrôlable à zéro sur ω en temps T .*

Théorème (Équivalence entre observabilité et contrôlabilité)

- L'équation $\partial_t f - \Delta f = 1_\omega u$ est contrôlable à zéro si et seulement si
- pour toute solution de $\partial_t g - \Delta g = 0$,

$$|g(T, \cdot)|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C |g|_{L^2([0, T] \times \omega)}^2.$$

Théorème (Équivalence entre observabilité et contrôlabilité)

- L'équation $\partial_t f - \Delta f = \mathbf{1}_\omega u$ est contrôlable à zéro si et seulement si
- pour toute solution de $\partial_t g - \Delta g = 0$,

$$|g(T, \cdot)|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C |g|_{L^2([0, T] \times \omega)}^2.$$

Remarque

Dualité observabilité/contrôlabilité : phénomène général

Méthode Lebeau-Robbiano

Théorème (Inégalité spectrale, Lebeau & Robbiano 1995)

Ω un ouvert borné de classe C^2 de \mathbb{R}^n , ω un ouvert non vide de Ω .

ϕ_k les fonctions propres de $-\Delta$, de valeurs propres λ_k .

$$\left| \sum_{\lambda_k \leq \mu} a_k \phi_k \right|_{L^2(\Omega)} \leq C e^{K\sqrt{\mu}} \left| \sum_{\lambda_k \leq \mu} a_k \phi_k \right|_{L^2(\omega)}$$

Méthode Lebeau-Robbiano

Théorème (Inégalité spectrale, Lebeau & Robbiano 1995)

Ω un ouvert borné de classe C^2 de \mathbb{R}^n , ω un ouvert non vide de Ω .

ϕ_k les fonctions propres de $-\Delta$, de valeurs propres λ_k .

$$\left| \sum_{\lambda_k \leq \mu} a_k \phi_k \right|_{L^2(\Omega)} \leq C e^{K\sqrt{\mu}} \left| \sum_{\lambda_k \leq \mu} a_k \phi_k \right|_{L^2(\omega)}$$

- Permet de contrôler à zéro les fréquences $\lambda_k \leq \mu$ à 0
- Dissipation de l'équation de la chaleur : $f_0 = \sum_{\lambda_k > \mu} a_k \phi_k$

$$|e^{t\Delta} f_0|_{L^2(\Omega)}^2 \leq e^{-2\mu t} |f_0|_{L^2(\Omega)}^2$$

Méthode Lebeau-Robbiano

Théorème (Inégalité spectrale, Lebeau & Robbiano 1995)

Ω un ouvert borné de classe C^2 de \mathbb{R}^n , ω un ouvert non vide de Ω .

ϕ_k les fonctions propres de $-\Delta$, de valeurs propres λ_k .

$$\left| \sum_{\lambda_k \leq \mu} a_k \phi_k \right|_{L^2(\Omega)} \leq C e^{K\sqrt{\mu}} \left| \sum_{\lambda_k \leq \mu} a_k \phi_k \right|_{L^2(\omega)}$$

- Permet de contrôler à zéro les fréquences $\lambda_k \leq \mu$ à 0
- Dissipation de l'équation de la chaleur : $f_0 = \sum_{\lambda_k > \mu} a_k \phi_k$

$$|e^{t\Delta} f_0|_{L^2(\Omega)}^2 \leq e^{-2\mu t} |f_0|_{L^2(\Omega)}^2$$

- Dissipation \gg inégalité spectrale \implies contrôlabilité à zéro
- Ne dépend que de l'inégalité spectrale

Méthode Lebeau-Robbiano

Théorème (Inégalité spectrale, Lebeau & Robbiano 1995)

Ω un ouvert borné de classe C^2 de \mathbb{R}^n , ω un ouvert non vide de Ω .

ϕ_k les fonctions propres de $-\Delta$, de valeurs propres λ_k .

$$\left| \sum_{\lambda_k \leq \mu} a_k \phi_k \right|_{L^2(\Omega)} \leq C e^{K\sqrt{\mu}} \left| \sum_{\lambda_k \leq \mu} a_k \phi_k \right|_{L^2(\omega)}$$

- Permet de contrôler à zéro les fréquences $\lambda_k \leq \mu$ à 0
- Dissipation de l'équation de la chaleur : $f_0 = \sum_{\lambda_k > \mu} a_k \phi_k$

$$|e^{t\Delta} f_0|_{L^2(\Omega)}^2 \leq e^{-2\mu t} |f_0|_{L^2(\Omega)}^2$$

- Dissipation \gg inégalité spectrale \implies contrôlabilité à zéro
- Ne dépend que de l'inégalité spectrale
- Démontre aussi contrôlabilité à zéro de $\partial_t + (-\Delta)^\alpha$ avec $\alpha > 1/2$
- Équation peu diffusives : dissipation \lesssim inégalité spectrale

Exemples d'équations peu diffusives

Chaleur fractionnaire $(\partial_t + (-\Delta)^\alpha)f = 1_\omega u$ ($\alpha \leq 1/2$)

- Inégalité spectrale en $\sqrt{\mu}$, dissipation en μ^α
- Pas contrôlable à zéro [Micu-Zuazua, Miller]

Exemples d'équations peu diffusives

Chaleur fractionnaire $(\partial_t + (-\Delta)^\alpha)f = \mathbf{1}_\omega u$ ($\alpha \leq 1/2$)

- Inégalité spectrale en $\sqrt{\mu}$, dissipation en μ^α
- Pas contrôlable à zéro [Micu-Zuazua, Miller]

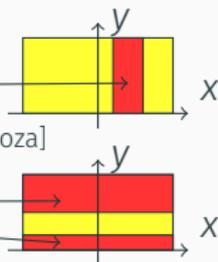
Grushin $(\partial_t - \partial_x^2 - x^2 \partial_y^2)f = \mathbf{1}_\omega u$

- Inégalité spectrale en μ , dissipation en μ

- Contrôlable seulement en temps grand si ω

[Beauchard-Cannarsa-Guglielmi, Beauchard-Miller-Morancey, Beauchard-Dardé-Ervedoza]

- Jamais contrôlable à zéro si ω



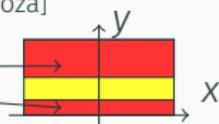
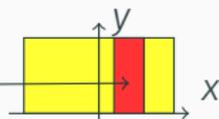
Exemples d'équations peu diffusives

Chaleur fractionnaire $(\partial_t + (-\Delta)^\alpha)f = \mathbf{1}_\omega u$ ($\alpha \leq 1/2$)

- Inégalité spectrale en $\sqrt{\mu}$, dissipation en μ^α
- Pas contrôlable à zéro [Micu-Zuazua, Miller]

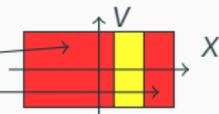
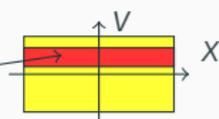
Grushin $(\partial_t - \partial_x^2 - x^2 \partial_y^2)f = \mathbf{1}_\omega u$

- Inégalité spectrale en μ , dissipation en μ
- Contrôlable seulement en temps grand si ω
- Jamais contrôlable à zéro si ω



Kolmogorov $(\partial_t - \partial_v^2 + v^2 \partial_x)f = \mathbf{1}_\omega u$

- Inégalité spectrale en μ , dissipation en $\sqrt{\mu}$
- Contrôlable seulement en temps grand si ω
- Jamais contrôlable à zéro si ω



Équation de la demi-chaleur et équation de Grushin

Équation de la chaleur fractionnaire et équation de Kolmogorov

Systèmes parabolique-transport

Conclusion

Équation de la demi-chaleur et équation de Grushin

Équation de la demi-chaleur

Équation de la demi-chaleur

- Demi-laplacien : $\sqrt{-\Delta} \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(n) e^{inx} \right) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |n| \widehat{f}(n) e^{inx}$
- Système de contrôle : $(\partial_t + \sqrt{-\Delta})f(t, x) = \mathbf{1}_\omega u, \quad x \in \mathbb{T}$

Équation de la demi-chaleur

Équation de la demi-chaleur

- Demi-laplacien : $\sqrt{-\Delta} \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(n) e^{inx} \right) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |n| \widehat{f}(n) e^{inx}$
- Système de contrôle : $(\partial_t + \sqrt{-\Delta})f(t, x) = \mathbf{1}_\omega u, \quad x \in \mathbb{T}$

Théorème (Non-contrôlabilité de la demi-chaleur)

Soit $T > 0$ et ω un ouvert strict de \mathbb{T} . L'équation de la demi-chaleur

$$(\partial_t + \sqrt{-\Delta})f = \mathbf{1}_\omega u$$

n'est pas contrôlable à zéro sur ω en temps T .

Non-contrôlabilité de l'équation de la demi-chaueur

Démonstration.

Tester inégalité d'observabilité avec $g(t, x) = \sum_{n>0} a_n e^{-nt} e^{inx}$:

$$\sum_{n>0} |a_n|^2 e^{-2nT} \leq C \int_{[0, T] \times \omega} \left| \sum_{n>0} a_n e^{-nt} e^{inx} \right|^2 dt dx$$

Non-contrôlabilité de l'équation de la demi-chaueur

Démonstration.

Tester inégalité d'observabilité avec $g(t, x) = \sum_{n>0} a_n e^{-nt} e^{inx}$:

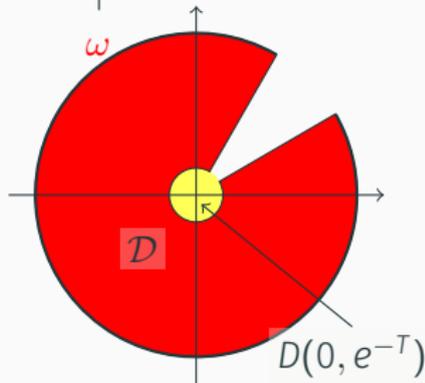
$$\sum_{n>0} |a_n|^2 e^{-2nT} \leq C \int_{[0, T] \times \omega} \left| \sum_{n>0} a_n e^{-nt} e^{inx} \right|^2 dt dx$$

- Chgt de variables : $z = e^{-t+ix}$

$$|g|_{L^2([0, T] \times \omega)}^2 = \int_{\mathcal{D}} \left| \sum_{n>0} a_n z^{n-1} \right|^2 d\lambda(z)$$

- Calcul en coordonnées polaires :

$$|g(T, \cdot)|_{L^2(\mathbb{T})}^2 \geq \pi^{-1} \int_{D(0, e^{-T})} \left| \sum_{n>0} a_n z^{n-1} \right|^2 d\lambda(z)$$



Non-contrôlabilité de l'équation de la demi-chaueur

Démonstration.

Tester inégalité d'observabilité avec $g(t, x) = \sum_{n>0} a_n e^{-nt} e^{inx}$:

$$\sum_{n>0} |a_n|^2 e^{-2nT} \leq C \int_{[0, T] \times \omega} \left| \sum_{n>0} a_n e^{-nt} e^{inx} \right|^2 dt dx$$

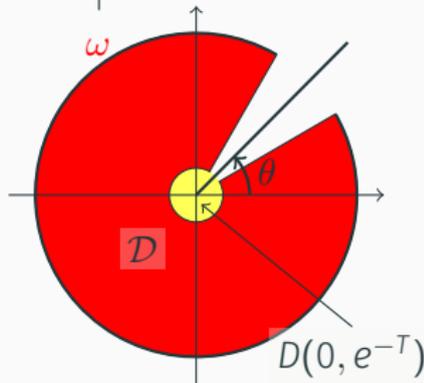
- Chgt de variables : $z = e^{-t+ix}$

$$|g|_{L^2([0, T] \times \omega)}^2 = \int_{\mathcal{D}} \left| \sum_{n>0} a_n z^{n-1} \right|^2 d\lambda(z)$$

- Calcul en coordonnées polaires :

$$|g(T, \cdot)|_{L^2(\mathbb{T})}^2 \geq \pi^{-1} \int_{D(0, e^{-T})} \left| \sum_{n>0} a_n z^{n-1} \right|^2 d\lambda(z)$$

- Observabilité \Rightarrow pour tout $p \in \mathbb{C}[X]$, $|p|_{L^2(D(0, e^{-T}))} \leq C |p|_{L^2(\mathcal{D})}$
- Faux d'après le théorème de Runge (prendre $p_k(z) \rightarrow 1/z$ en dehors de $\mathbb{C} \setminus e^{i\theta} \mathbb{R}_+$)



□

Équation de la demi-chaleur et équation de Grushin

Équation de Grushin

Équation de Grushin

$$(\partial_t - \partial_x^2 - x^2 \partial_y^2)f(t, x, y) = \mathbf{1}_\omega u(t, x, y), \quad x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{T}$$

Équation de Grushin

$$(\partial_t - \partial_x^2 - x^2 \partial_y^2)f(t, x, y) = \mathbf{1}_\omega u(t, x, y), \quad x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{T}$$

«Plongement» de la demi-chaleur dans l'équation de Grushin

- Pour $n \in \mathbb{N}$, $e^{-nx^2/2+iny}$ fonction propre, valeur propre n
- Solutions particulières : $g(t, x, y) = \sum_{n>0} a_n e^{-nt-nx^2/2+iny}$
- En la variable y : même forme que les solutions de la demi-chaleur

Théorème (Équation de Grushin sur des bandes horizontales)

Soit $T > 0$, ω_y un ouvert strict de \mathbb{T} et $\omega = \mathbb{R} \times \omega_y$. L'équation de Grushin n'est pas contrôlable sur ω en temps T .

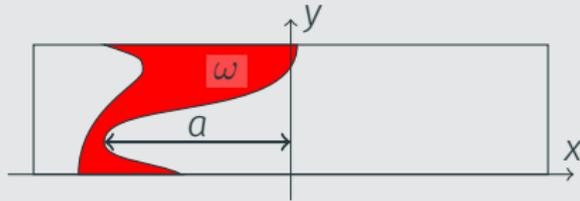
Contrôle de l'équation de Grushin

Théorème (Équation de Grushin sur des bandes horizontales)

Soit $T > 0$, ω_y un ouvert strict de \mathbb{T} et $\omega = \mathbb{R} \times \omega_y$. L'équation de Grushin n'est pas contrôlable sur ω en temps T .

Théorème (Duprez-K 2018)

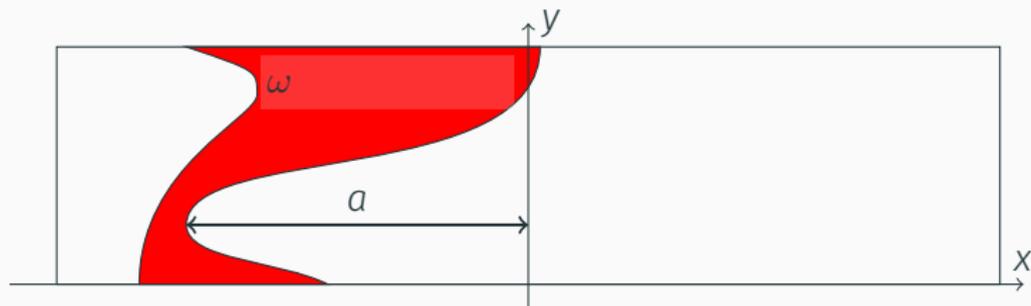
$$\omega = \{\gamma_1(y) < x < \gamma_2(y)\}$$
$$a = \max(\sup(\gamma_2^-), \sup(\gamma_1^+))$$



- L'équation de Grushin est contrôlable à zéro sur ω en temps $T > a^2/2$.
- L'équation de Grushin n'est pas contrôlable à zéro sur ω en temps $T < a^2/2$.

Contrôlabilité en temps grand

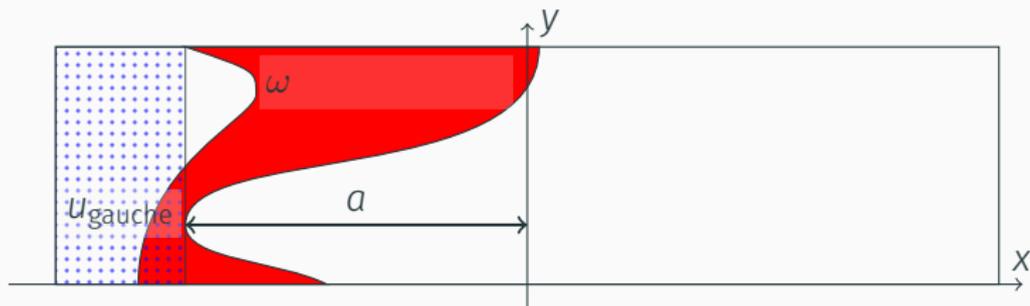
Démonstration.



- Temps minimum connu pour les bandes verticales

Contrôlabilité en temps grand

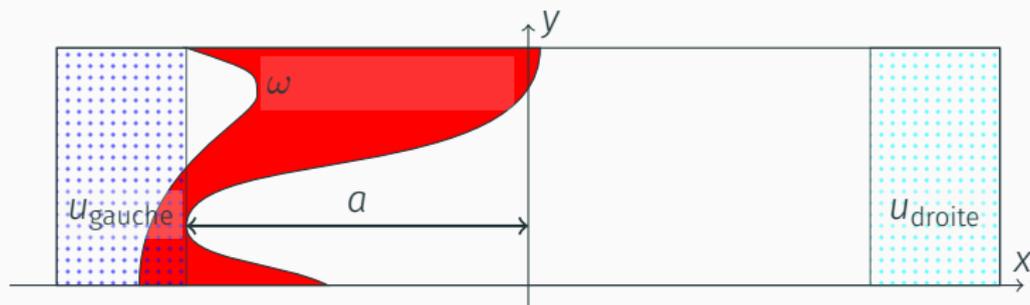
Démonstration.



- Temps minimum connu pour les bandes verticales
- u_{gauche} contrôle à support sur une bande à gauche (possible si $T > a^2/2$)

Contrôlabilité en temps grand

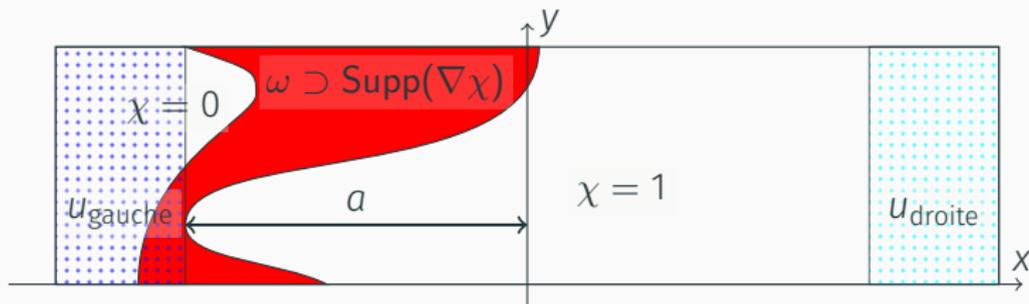
Démonstration.



- Temps minimum connu pour les bandes verticales
- u_{gauche} contrôle à support sur une bande à gauche (possible si $T > a^2/2$)
- u_{droite} contrôle à support sur une bande à droite (possible si $T > a^2/2$)

Contrôlabilité en temps grand

Démonstration.



- Temps minimum connu pour les bandes verticales
- u_{gauche} contrôle à support sur une bande à gauche (possible si $T > a^2/2$)
- u_{droite} contrôle à support sur une bande à droite (possible si $T > a^2/2$)
- χ troncature avec $\text{Supp}(\nabla\chi) \subset \omega$, $\chi = 0$ «à gauche de ω » et $\chi = 1$ «à droite de ω »
- $f := \chi f_{\text{gauche}} + (1 - \chi) f_{\text{droite}}$.
 $(\partial_t - \partial_x^2 - x^2 \partial_y^2) f = \chi u_{\text{gauche}} + (1 - \chi) u_{\text{droite}} + \text{termes avec } \nabla\chi, \Delta\chi$

□

Non-contrôlabilité en temps petit

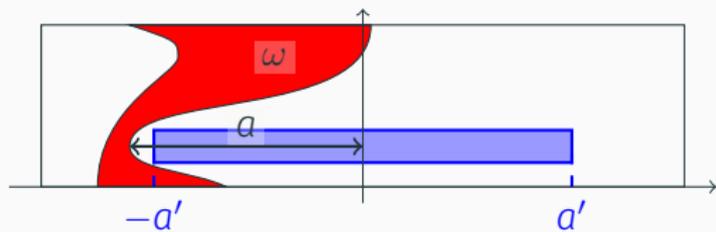
Démonstration.

- Solutions particulières : $g(t, x, y) = \sum_{n>0} a_n e^{-nt - nx^2/2 + iny}$, $p(z) = \sum_{n>0} a_n z^{n-1}$
- Minoration membre gauche : $|g(T, \cdot, \cdot)|_{L^2}^2 \geq \sum \frac{|a_n|^2}{\sqrt{n}} e^{-2nT} \geq c |p|_{L^2(D(0, e^{-T}))}^2$

Non-contrôlabilité en temps petit

Démonstration.

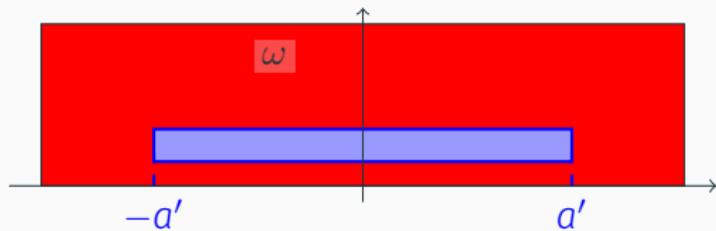
- Solutions particulières : $g(t, x, y) = \sum_{n>0} a_n e^{-nt - nx^2/2 + iny}$, $p(z) = \sum_{n>0} a_n z^{n-1}$
- Minoration membre gauche : $|g(T, \cdot, \cdot)|_{L^2}^2 \geq \sum \frac{|a_n|^2}{\sqrt{n}} e^{-2nT} \geq c |p|_{L^2(D(0, e^{-T}))}^2$
- Membre droit : $\text{CdV } z = e^{-t+iy-x^2/2} : |g|_{L^2([0, T] \times \omega)}^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{\mathcal{D}_x} |p(z)|^2 d\lambda(z) dx$



Non-contrôlabilité en temps petit

Démonstration.

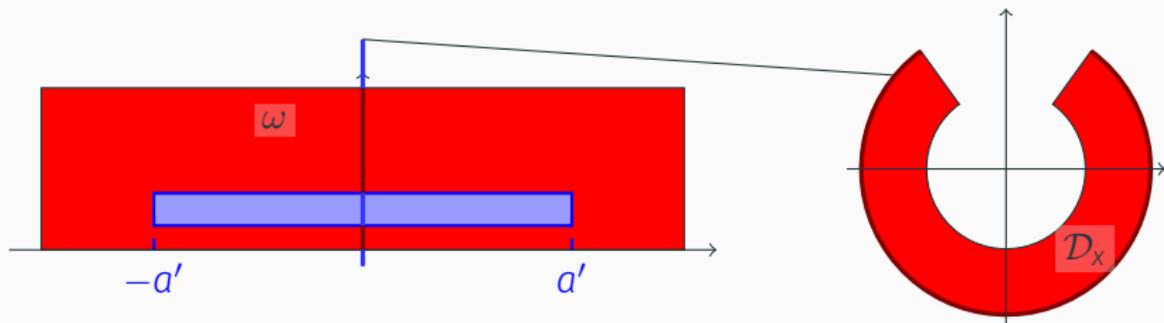
- Solutions particulières : $g(t, x, y) = \sum_{n>0} a_n e^{-nt - nx^2/2 + iny}$, $p(z) = \sum_{n>0} a_n z^{n-1}$
- Minoration membre gauche : $|g(T, \cdot, \cdot)|_{L^2}^2 \geq \sum \frac{|a_n|^2}{\sqrt{n}} e^{-2nT} \geq c |p|_{L^2(D(0, e^{-T}))}^2$
- Membre droit : $\text{CdV } z = e^{-t+iy-x^2/2} : |g|_{L^2([0, T] \times \omega)}^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{\mathcal{D}_x} |p(z)|^2 d\lambda(z) dx$



Non-contrôlabilité en temps petit

Démonstration.

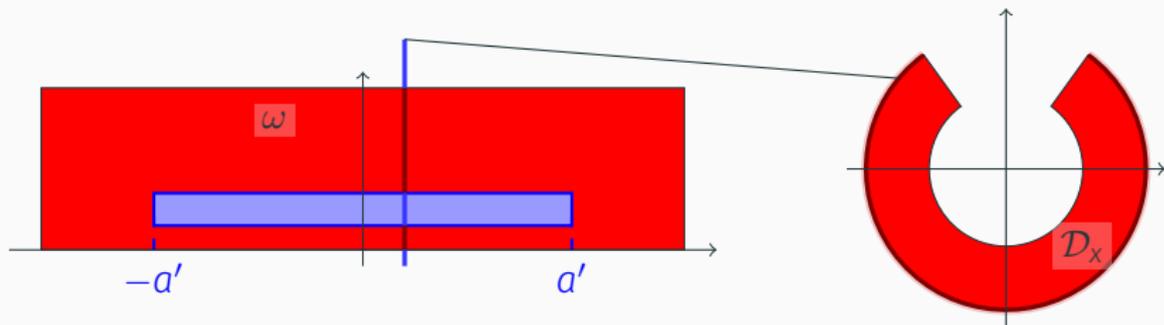
- Solutions particulières : $g(t, x, y) = \sum_{n>0} a_n e^{-nt - nx^2/2 + iny}$, $p(z) = \sum_{n>0} a_n z^{n-1}$
- Minoration membre gauche : $|g(T, \cdot, \cdot)|_{L^2}^2 \geq \sum \frac{|a_n|^2}{\sqrt{n}} e^{-2nT} \geq c |p|_{L^2(D(0, e^{-T}))}^2$
- Membre droit : $\text{CdV } z = e^{-t+iy-x^2/2} : |g|_{L^2([0, T] \times \omega)}^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{\mathcal{D}_x} |p(z)|^2 d\lambda(z) dx$



Non-contrôlabilité en temps petit

Démonstration.

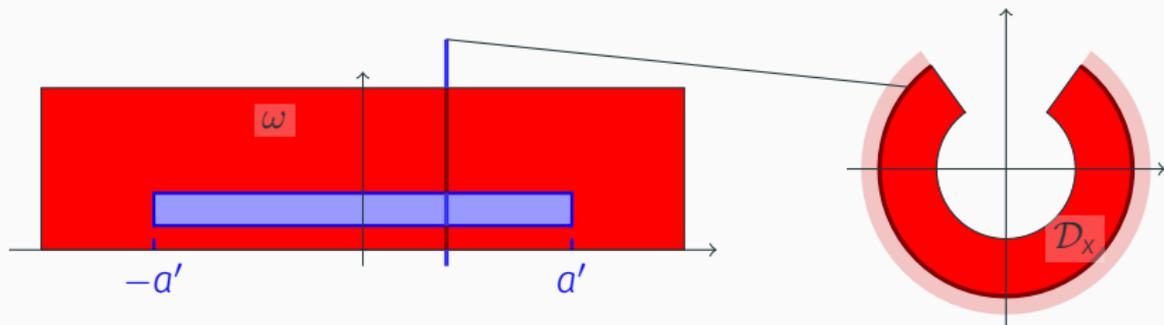
- Solutions particulières : $g(t, x, y) = \sum_{n>0} a_n e^{-nt - nx^2/2 + iny}$, $p(z) = \sum_{n>0} a_n z^{n-1}$
- Minoration membre gauche : $|g(T, \cdot, \cdot)|_{L^2}^2 \geq \sum \frac{|a_n|^2}{\sqrt{n}} e^{-2nT} \geq c |p|_{L^2(D(0, e^{-T}))}^2$
- Membre droit : $\text{CdV } z = e^{-t+iy-x^2/2} : |g|_{L^2([0, T] \times \omega)}^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{\mathcal{D}_x} |p(z)|^2 d\lambda(z) dx$



Non-contrôlabilité en temps petit

Démonstration.

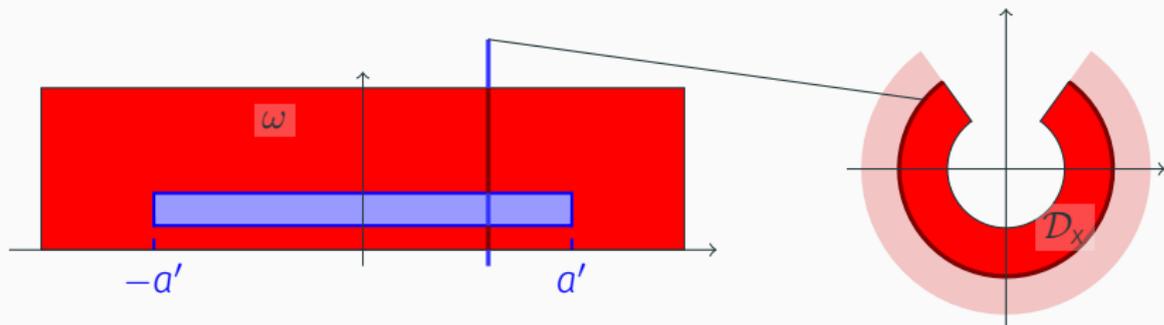
- Solutions particulières : $g(t, x, y) = \sum_{n>0} a_n e^{-nt - nx^2/2 + iny}$, $p(z) = \sum_{n>0} a_n z^{n-1}$
- Minoration membre gauche : $|g(T, \cdot, \cdot)|_{L^2}^2 \geq \sum \frac{|a_n|^2}{\sqrt{n}} e^{-2nT} \geq c |p|_{L^2(D(0, e^{-T}))}^2$
- Membre droit : $\text{CdV } z = e^{-t+iy-x^2/2} : |g|_{L^2([0, T] \times \omega)}^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{\mathcal{D}_x} |p(z)|^2 d\lambda(z) dx$



Non-contrôlabilité en temps petit

Démonstration.

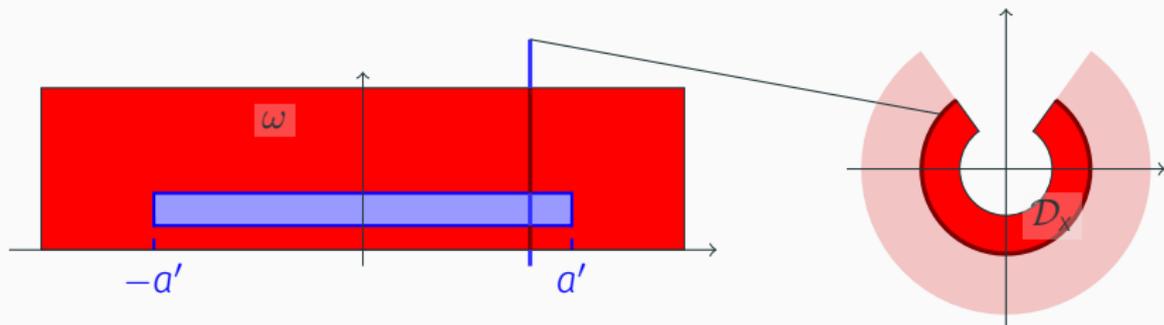
- Solutions particulières : $g(t, x, y) = \sum_{n>0} a_n e^{-nt - nx^2/2 + iny}$, $p(z) = \sum_{n>0} a_n z^{n-1}$
- Minoration membre gauche : $|g(T, \cdot, \cdot)|_{L^2}^2 \geq \sum \frac{|a_n|^2}{\sqrt{n}} e^{-2nT} \geq c |p|_{L^2(D(0, e^{-T}))}^2$
- Membre droit : $\text{CdV } z = e^{-t+iy-x^2/2} : |g|_{L^2([0, T] \times \omega)}^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{\mathcal{D}_x} |p(z)|^2 d\lambda(z) dx$



Non-contrôlabilité en temps petit

Démonstration.

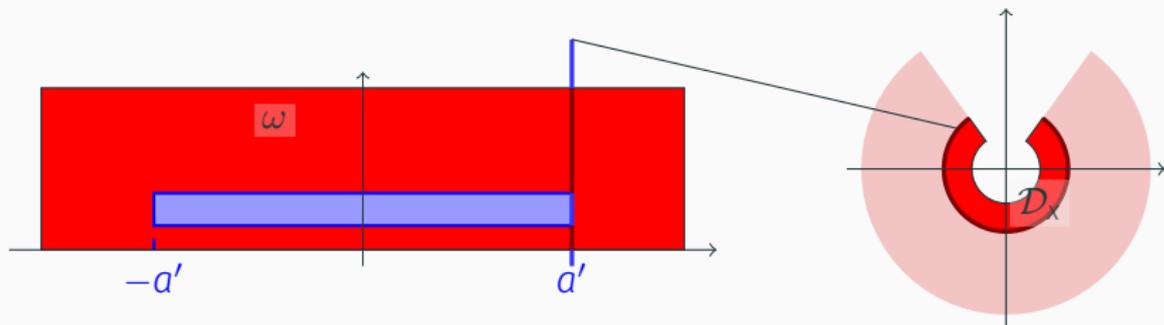
- Solutions particulières : $g(t, x, y) = \sum_{n>0} a_n e^{-nt - nx^2/2 + iny}$, $p(z) = \sum_{n>0} a_n z^{n-1}$
- Minoration membre gauche : $|g(T, \cdot, \cdot)|_{L^2}^2 \geq \sum \frac{|a_n|^2}{\sqrt{n}} e^{-2nT} \geq c |p|_{L^2(D(0, e^{-T}))}^2$
- Membre droit : $\text{CdV } z = e^{-t+iy-x^2/2} : |g|_{L^2([0, T] \times \omega)}^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{D_x} |p(z)|^2 d\lambda(z) dx$



Non-contrôlabilité en temps petit

Démonstration.

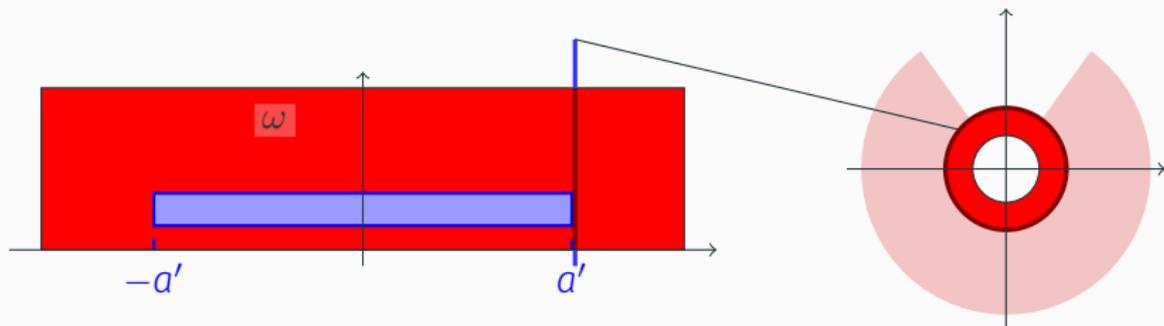
- Solutions particulières : $g(t, x, y) = \sum_{n>0} a_n e^{-nt - nx^2/2 + iny}$, $p(z) = \sum_{n>0} a_n z^{n-1}$
- Minoration membre gauche : $|g(T, \cdot, \cdot)|_{L^2}^2 \geq \sum \frac{|a_n|^2}{\sqrt{n}} e^{-2nT} \geq c |p|_{L^2(D(0, e^{-T}))}^2$
- Membre droit : $CdV z = e^{-t+iy-x^2/2} : |g|_{L^2([0, T] \times \omega)}^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{\mathcal{D}_x} |p(z)|^2 d\lambda(z) dx$



Non-contrôlabilité en temps petit

Démonstration.

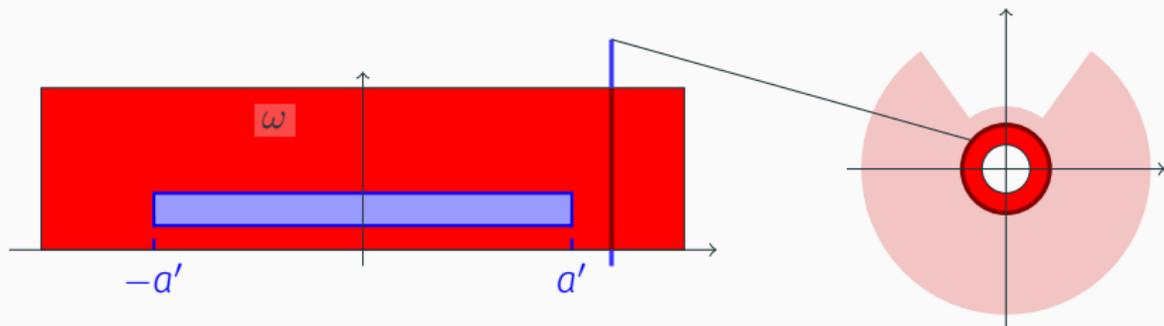
- Solutions particulières : $g(t, x, y) = \sum_{n>0} a_n e^{-nt - nx^2/2 + iny}$, $p(z) = \sum_{n>0} a_n z^{n-1}$
- Minoration membre gauche : $|g(T, \cdot, \cdot)|_{L^2}^2 \geq \sum \frac{|a_n|^2}{\sqrt{n}} e^{-2nT} \geq c |p|_{L^2(D(0, e^{-T}))}^2$
- Membre droit : $CdV z = e^{-t+iy-x^2/2} : |g|_{L^2([0, T] \times \omega)}^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{\mathcal{D}_x} |p(z)|^2 d\lambda(z) dx$



Non-contrôlabilité en temps petit

Démonstration.

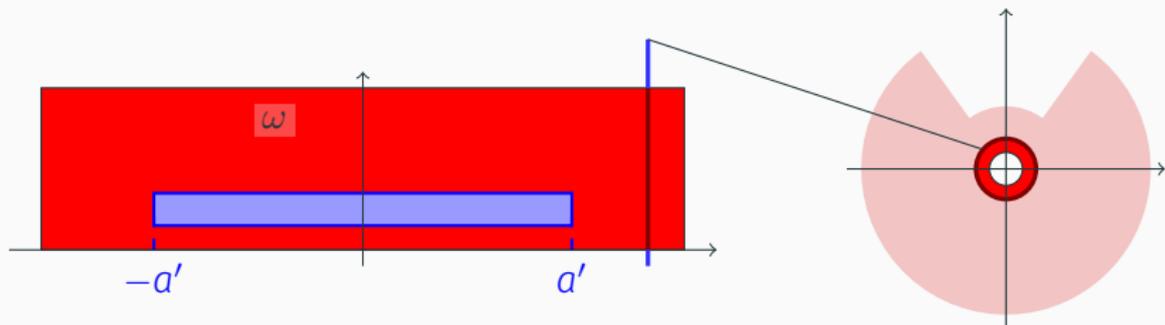
- Solutions particulières : $g(t, x, y) = \sum_{n>0} a_n e^{-nt - nx^2/2 + iny}$, $p(z) = \sum_{n>0} a_n z^{n-1}$
- Minoration membre gauche : $|g(T, \cdot, \cdot)|_{L^2}^2 \geq \sum \frac{|a_n|^2}{\sqrt{n}} e^{-2nT} \geq c |p|_{L^2(D(0, e^{-T}))}^2$
- Membre droit : $CdV z = e^{-t+iy-x^2/2} : |g|_{L^2([0, T] \times \omega)}^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{\mathcal{D}_x} |p(z)|^2 d\lambda(z) dx$



Non-contrôlabilité en temps petit

Démonstration.

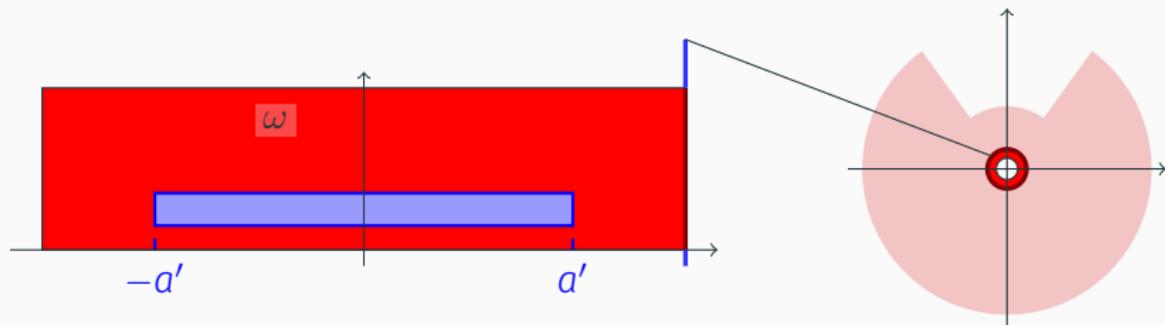
- Solutions particulières : $g(t, x, y) = \sum_{n>0} a_n e^{-nt - nx^2/2 + iny}$, $p(z) = \sum_{n>0} a_n z^{n-1}$
- Minoration membre gauche : $|g(T, \cdot, \cdot)|_{L^2}^2 \geq \sum \frac{|a_n|^2}{\sqrt{n}} e^{-2nT} \geq c |p|_{L^2(D(0, e^{-T}))}^2$
- Membre droit : $\text{CdV } z = e^{-t+iy-x^2/2} : |g|_{L^2([0, T] \times \omega)}^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{\mathcal{D}_x} |p(z)|^2 d\lambda(z) dx$



Non-contrôlabilité en temps petit

Démonstration.

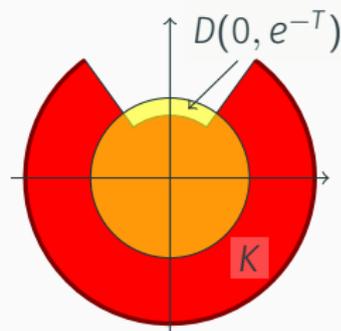
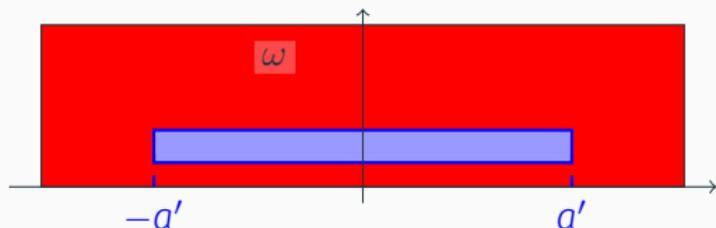
- Solutions particulières : $g(t, x, y) = \sum_{n>0} a_n e^{-nt - nx^2/2 + iny}$, $p(z) = \sum_{n>0} a_n z^{n-1}$
- Minoration membre gauche : $|g(T, \cdot, \cdot)|_{L^2}^2 \geq \sum \frac{|a_n|^2}{\sqrt{n}} e^{-2nT} \geq c |p|_{L^2(D(0, e^{-T}))}^2$
- Membre droit : $CdV z = e^{-t+iy-x^2/2} : |g|_{L^2([0, T] \times \omega)}^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{\mathcal{D}_x} |p(z)|^2 d\lambda(z) dx$



Non-contrôlabilité en temps petit

Démonstration.

- Solutions particulières : $g(t, x, y) = \sum_{n>0} a_n e^{-nt - nx^2/2 + iny}$, $p(z) = \sum_{n>0} a_n z^{n-1}$
- Minoration membre gauche : $|g(T, \cdot, \cdot)|_{L^2}^2 \geq \sum \frac{|a_n|^2}{\sqrt{n}} e^{-2nT} \geq c |p|_{L^2(D(0, e^{-T}))}^2$
- Membre droit : $\text{CdV } z = e^{-t+iy-x^2/2} : |g|_{L^2([0, T] \times \omega)}^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{\mathcal{D}_x} |p(z)|^2 d\lambda(z) dx$
- Observabilité \Rightarrow pour tout $p \in \mathbb{C}[X]$, $|p|_{L^2(D(0, e^{-T}))} \leq C |p|_{L^\infty(K)}$ □



Équation de la demi-chaleur et équation de Grushin

Gestion des termes d'erreurs pour
Grushin borné

Grushin borné

- $(\partial_t - \partial_x^2 - x^2 \partial_y^2)g(t, x, y) = 0$, $x \in]-1, 1[$, $y \in \mathbb{T}$, conditions de Dirichlet
- Fonction propre : $v_n(x) = w_n(x)e^{-nx^2/2+iny}$, valeur propre : $\lambda_n = n + \rho_n$
- Solutions particulières : $g(t, x, y) = \sum_{n>0} a_n e^{-nx^2/2-nt+iny} w_n(x) e^{-\rho_n t}$

Grushin borné

- $(\partial_t - \partial_x^2 - x^2 \partial_y^2)g(t, x, y) = 0$, $x \in]-1, 1[$, $y \in \mathbb{T}$, conditions de Dirichlet
- Fonction propre : $v_n(x) = w_n(x)e^{-nx^2/2+iny}$, valeur propre : $\lambda_n = n + \rho_n$
- Solutions particulières : $g(t, x, y) = \sum_{n>0} a_n e^{-nx^2/2-nt+iny} w_n(x) e^{-\rho_n t}$

Définition

$(\gamma(n))$ une suite. H_γ l'opérateur sur les polynômes

$$H_\gamma: \sum a_n z^n \mapsto \sum \gamma(n) a_n z^n$$

Trouver des estimations sur H_γ dans les bonnes normes

Théorème

γ holomorphe bornée sur un demi-plan à droite. K un compact de \mathbb{C} . U un ouvert étoilé en zéro qui contient K . $p = \sum a_n z^n \in \mathbb{C}[X]$

$$|H_\gamma p|_{L^\infty(K)} \leq C |p|_{L^\infty(U)} \quad \left| \sum_{n>0} \gamma(n) a_n z^n \right|_{L^\infty(K)} \leq C \left| \sum_{n>0} a_n z^n \right|_{L^\infty(U)}$$

Théorème

γ holomorphe bornée sur un demi-plan à droite. K un compact de \mathbb{C} . U un ouvert étoilé en zéro qui contient K . $p = \sum a_n z^n \in \mathbb{C}[X]$

$$|H_\gamma p|_{L^\infty(K)} \leq C |p|_{L^\infty(U)} \quad \left| \sum_{n>0} \gamma(n) a_n z^n \right|_{L^\infty(K)} \leq C \left| \sum_{n>0} a_n z^n \right|_{L^\infty(U)}$$

Démonstration.

- Avec $K_\gamma(\zeta) = \sum \gamma(n) \zeta^n$, $H_\gamma p(z) = \frac{1}{2i\pi} \oint_{\partial D} \frac{1}{\zeta} K_\gamma \left(\frac{z}{\zeta} \right) p(\zeta) d\zeta$
- Théorème : $K_\gamma(\zeta)$ s'étend en une fonction holomorphe pour $\zeta \notin [1, +\infty[$
- Changement de chemin d'intégration :

$$|H_\gamma p(z)| = \left| \sum_{n>0} \gamma(n) a_n z^n \right| = \left| \frac{1}{2i\pi} \oint_{\mathcal{C}} \frac{1}{\zeta} K_\gamma \left(\frac{z}{\zeta} \right) p(\zeta) d\zeta \right| \leq C |p|_{L^\infty(\mathcal{C})} \quad \square$$

Théorème

γ holomorphe bornée sur un demi-plan à droite. K un compact de \mathbb{C} . U un ouvert étoilé en zéro qui contient K . $p = \sum a_n z^n \in \mathbb{C}[X]$

$$|H_\gamma p|_{L^\infty(K)} \leq C |p|_{L^\infty(U)} \quad \left| \sum_{n>0} \gamma(n) a_n z^n \right|_{L^\infty(K)} \leq C \left| \sum_{n>0} a_n z^n \right|_{L^\infty(U)}$$

Démonstration.

- Avec $K_\gamma(\zeta) = \sum \gamma(n) \zeta^n$, $H_\gamma p(z) = \frac{1}{2i\pi} \oint_{\partial D} \frac{1}{\zeta} K_\gamma\left(\frac{z}{\zeta}\right) p(\zeta) d\zeta$
- Théorème : $K_\gamma(\zeta)$ s'étend en une fonction holomorphe pour $\zeta \notin [1, +\infty[$
- Changement de chemin d'intégration :

$$|H_\gamma p(z)| = \left| \sum_{n>0} \gamma(n) a_n z^n \right| = \left| \frac{1}{2i\pi} \oint_C \frac{1}{\zeta} K_\gamma\left(\frac{z}{\zeta}\right) p(\zeta) d\zeta \right| \leq C |p|_{L^\infty(C)} \quad \square$$

Appliquer ceci à $\gamma(n) = w_n(x) e^{-\rho n t}$

Équation de la chaleur fractionnaire et équation de Kolmogorov

Équation de la chaleur fractionnaire

Équation de la chaleur fractionnaire tournée

- Laplacien fractionnaire : $(-\Delta)^\alpha f = \mathcal{F}^{-1}(|\xi|^{2\alpha} \mathcal{F}f(\xi))$
- Système de contrôle : $(\partial_t + z(-\Delta)^\alpha)f(t, x) = \mathbf{1}_\omega u, \quad x \in \mathbb{R}$

Équation de la chaleur fractionnaire tournée

- Laplacien fractionnaire : $(-\Delta)^\alpha f = \mathcal{F}^{-1}(|\xi|^{2\alpha} \mathcal{F}f(\xi))$
- Système de contrôle : $(\partial_t + z(-\Delta)^\alpha)f(t, x) = \mathbf{1}_\omega u, \quad x \in \mathbb{R}$

Théorème (Non-contrôlabilité de la chaleur fractionnaire tournée)

Soit $T > 0$, $\Re(z) > 0$ et ω un ouvert strict de \mathbb{R} . L'équation de la chaleur fractionnaire tournée

$$(\partial_t + z(-\Delta)^\alpha)f = \mathbf{1}_\omega u$$

n'est pas contrôlable à zéro sur ω en temps T .

Chaleur fractionnaire avec $\alpha < 1/2$: non-contrôlabilité

$$\Omega = \mathbb{R}, \omega = \{|x| > \epsilon\}, \Re(z) > 0.$$

Non contrôlabilité de $\partial_t + z(-\Delta)^\alpha$.

- Contrôlabilité \Leftrightarrow observabilité :

$$(\partial_t + \bar{z}(-\Delta)^\alpha)g = 0 \implies |g(T, \cdot)|_{L^2(\Omega)} \leq |g|_{L^2([0, T] \times \omega)}$$

Chaleur fractionnaire avec $\alpha < 1/2$: non-contrôlabilité

$$\Omega = \mathbb{R}, \omega = \{|x| > \epsilon\}, \Re(z) > 0.$$

Non contrôlabilité de $\partial_t + z(-\Delta)^\alpha$.

- Contrôlabilité \Leftrightarrow observabilité :

$$(\partial_t + \bar{z}(-\Delta)^\alpha)g = 0 \implies |g(T, \cdot)|_{L^2(\Omega)} \leq |g|_{L^2([0, T] \times \omega)}$$

- g_0 qui se concentre en 0 : $g_0(x) = e^{-x^2/2h}$

Chaleur fractionnaire avec $\alpha < 1/2$: non-contrôlabilité

$$\Omega = \mathbb{R}, \omega = \{|x| > \epsilon\}, \Re(z) > 0.$$

Non contrôlabilité de $\partial_t + z(-\Delta)^\alpha$.

- Contrôlabilité \Leftrightarrow observabilité :

$$(\partial_t + \bar{z}(-\Delta)^\alpha)g = 0 \implies |g(T, \cdot)|_{L^2(\Omega)} \leq |g|_{L^2([0, T] \times \omega)}$$

- g_0 qui se concentre en 0 : $g_0(x) = e^{-x^2/2h + ix\xi_0/h}$

Chaleur fractionnaire avec $\alpha < 1/2$: non-contrôlabilité

$$\Omega = \mathbb{R}, \omega = \{|x| > \epsilon\}, \Re(z) > 0.$$

Non contrôlabilité de $\partial_t + z(-\Delta)^\alpha$.

- Contrôlabilité \Leftrightarrow observabilité :

$$(\partial_t + \bar{z}(-\Delta)^\alpha)g = 0 \implies |g(T, \cdot)|_{L^2(\Omega)} \leq |g|_{L^2([0, T] \times \omega)}$$

- g_0 qui se concentre en 0 : $g_0(x) = \chi(hD_x - \xi_0)e^{-x^2/2h + ix\xi_0/h}$

Chaleur fractionnaire avec $\alpha < 1/2$: non-contrôlabilité

$$\Omega = \mathbb{R}, \omega = \{|x| > \epsilon\}, \Re(z) > 0.$$

Non contrôlabilité de $\partial_t + z(-\Delta)^\alpha$.

- Contrôlabilité \Leftrightarrow observabilité :

$$(\partial_t + \bar{z}(-\Delta)^\alpha)g = 0 \implies |g(T, \cdot)|_{L^2(\Omega)} \leq |g|_{L^2([0, T] \times \omega)}$$

- g_0 qui se concentre en 0 : $g_0(x) = \chi(hD_x - \xi_0)e^{-x^2/2h + ix\xi_0/h}$

$$g(t, x) = c_h e^{ix\xi_0/h - x^2/2h} \int_{\mathbb{R}} \chi(\xi) e^{-(\xi - ix)^2/2h - t\bar{z}|\xi + \xi_0|^{2\alpha}/h^{2\alpha}} d\xi$$

Chaleur fractionnaire avec $\alpha < 1/2$: non-contrôlabilité

$$\Omega = \mathbb{R}, \omega = \{|x| > \epsilon\}, \Re(z) > 0.$$

Non contrôlabilité de $\partial_t + z(-\Delta)^\alpha$.

- Contrôlabilité \Leftrightarrow observabilité :

$$(\partial_t + \bar{z}(-\Delta)^\alpha)g = 0 \implies |g(T, \cdot)|_{L^2(\Omega)} \leq |g|_{L^2([0, T] \times \omega)}$$

- g_0 qui se concentre en 0 : $g_0(x) = \chi(hD_x - \xi_0)e^{-x^2/2h + ix\xi_0/h}$

$$g(t, x) = c_h e^{ix\xi_0/h - x^2/2h} \int_{\mathbb{R}} \chi(\xi) e^{-(\xi - ix)^2/2h - t\bar{z}|\xi + \xi_0|^{2\alpha}/h^{2\alpha}} d\xi$$

- Méthode du point col :

$$g(t, x) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{|x|^\infty} e^{-ct/h}\right) \quad |x| > \epsilon$$

$$g(t, x) = e^{ix\xi_0/h - x^2/2h} - \mathcal{O}(h^{-2\alpha}) \quad |x| < \frac{\xi_0}{4} \quad \square$$

Équation de la chaleur fractionnaire et équation de Kolmogorov

Équation de Kolmogorov

Équation de Kolmogorov

$$(\partial_t - \partial_v^2 + v^2 \partial_x) f(t, x, v) = \mathbf{1}_\omega u(t, x, v), \quad x \in \mathbb{R}, v \in \mathbb{R}$$

Équation de Kolmogorov

$$(\partial_t - \partial_v^2 + v^2 \partial_x) f(t, x, v) = \mathbf{1}_\omega u(t, x, v), \quad x \in \mathbb{R}, v \in \mathbb{R}$$

«Plongement» de la chaleur fractionnaire dans l'équation de Kolmogorov

- Pour $\xi \in \mathbb{R}$, $e^{-\sqrt{i\xi}v^2/2+ix\xi}$ fonction propre, valeur propre $\sqrt{i\xi}$
- Solutions particulières : $g(t, x, v) = \int_{\mathbb{R}} a(\xi) e^{-\sqrt{i\xi}(t+v^2/2)+ix\xi} d\xi$
- En la variable x : même forme que solutions de $(\partial_t + \sqrt{i}(-\Delta_x)^{1/4})g(t, x) = 0$

Équation de Kolmogorov

Équation de Kolmogorov

$$(\partial_t - \partial_v^2 + v^2 \partial_x) f(t, x, v) = \mathbf{1}_\omega u(t, x, v), \quad x \in \mathbb{R}, v \in \mathbb{R}$$

«Plongement» de la chaleur fractionnaire dans l'équation de Kolmogorov

- Pour $\xi \in \mathbb{R}$, $e^{-\sqrt{i\xi}v^2/2 + ix\xi}$ fonction propre, valeur propre $\sqrt{i\xi}$
- Solutions particulières : $g(t, x, v) = \int_{\mathbb{R}} a(\xi) e^{-\sqrt{i\xi}(t+v^2/2) + ix\xi} d\xi$
- En la variable x : même forme que solutions de $(\partial_t + \sqrt{i}(-\Delta_x)^{1/4})g(t, x) = 0$

Théorème (Équation de Kolmogorov sur des bandes verticales)

Soit $T > 0$, ω_v un ouvert strict de \mathbb{R} et $\omega = \omega_v \times \mathbb{R}$. L'équation de Kolmogorov n'est pas contrôlable sur ω en temps T .

Systemes parabolique-transport

Définition et problème considéré

L'équation :

$$\partial_t f(t, x) + A \partial_x f(t, x) - B \partial_x^2 f(t, x) = \mathbf{1}_\omega u(t, x), \quad (t, x) \in [0, +\infty[\times \mathbb{T}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}, \quad D + D^* \text{ définie positive}; \quad A = \begin{pmatrix} A' & * \\ * & * \end{pmatrix}, \quad A' = A'^*.$$

Couplage équations paraboliques et équations de transport

$$f = \begin{pmatrix} f_h \\ f_p \end{pmatrix}, \quad \begin{cases} (\partial_t + A' \partial_x) f_h(t, x) + A_{12} \partial_x f_p(t, x) = \mathbf{1}_\omega u_h(t, x) \\ (\partial_t - D \partial_x^2 + A_{22} \partial_x) f_p(t, x) + A_{21} \partial_x f_h(t, x) = \mathbf{1}_\omega u_p(t, x) \end{cases}$$

Cas particuliers de systèmes paraboliques-hyperboliques dans la littérature

- [Rosier-Rouchon, Martin-Rosier-Rouchon, Chaves-Silva-Rosier-Zuazua]
- [Ervedoza-Guerrero-Glass-Puel, Chowdhury-Mitra-Ramaswamy-Renardy, Chowdhury-Mitra]
- [Ivanov-Pandolfi, Guerrero-Imanuvilov]
- [Albano-Tataru, [Lebeau-Zuazua](#)]

Théorème (Beauchard-K-Le Balc'h 2019)

ω un intervalle ouvert de \mathbb{T} .

$$T^* = \frac{2\pi - \text{longueur}(\omega)}{\min_{\mu \in \text{Sp}(A')} |\mu|}$$

Alors

1. le système n'est pas contrôlable à zéro sur ω en temps $T < T^*$,
2. le système est contrôlable à zéro sur ω en temps $T > T^*$.

Temps minimal = temps minimal pour l'équation de transport

Dans le cas

$$\partial_t f_h + A' \partial_x f_h = u_h \mathbf{1}_\omega$$

Solutions libres = somme de solutions se déplaçant à vitesse $\mu_k \in \text{Sp}(A')$.

Composantes paraboliques, composantes hyperboliques

Composantes de Fourier

$$(-B\partial_x^2 + A\partial_x)Xe^{inx} = n^2 \left(B + \frac{i}{n}A \right) Xe^{inx}$$

Spectre de $-B\partial_x^2 + A\partial_x$

$$\text{Sp}(-B\partial_x^2 + A\partial_x) = \left\{ n^2 \text{Sp} \left(B + \frac{i}{n}A \right) \right\}$$

Composantes de Fourier

$$(-B\partial_x^2 + A\partial_x)Xe^{inx} = n^2 \left(B + \frac{i}{n}A \right) Xe^{inx}$$

Spectre de $-B\partial_x^2 + A\partial_x$

$$\text{Sp}(-B\partial_x^2 + A\partial_x) = \left\{ n^2 \text{Sp} \left(B + \frac{i}{n}A \right) \right\}$$

Théorie perturbative

λ_{nk} valeurs propres de $B + \frac{i}{n}A$. Perturbation de B : $\lambda_{nk} \rightarrow \lambda_k \in \text{Sp}(B)$

- Si $\lambda_k \neq 0$, $n^2 \lambda_{nk} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n^2 \lambda_k$: fréquences paraboliques
- Si $\lambda_k = 0$, $n^2 \lambda_{nk} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} in \mu_k$: fréquences hyperboliques

Composantes de Fourier

$$(-B\partial_x^2 + A\partial_x)Xe^{inx} = n^2 \left(B + \frac{i}{n}A \right) Xe^{inx}$$

Spectre de $-B\partial_x^2 + A\partial_x$

$$\text{Sp}(-B\partial_x^2 + A\partial_x) = \left\{ n^2 \text{Sp} \left(B + \frac{i}{n}A \right) \right\}$$

Théorie perturbative

λ_{nk} valeurs propres de $B + \frac{i}{n}A$. Perturbation de B : $\lambda_{nk} \rightarrow \lambda_k \in \text{Sp}(B)$

- Si $\lambda_k \neq 0$, $n^2 \lambda_{nk} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n^2 \lambda_k$: fréquences paraboliques
- Si $\lambda_k = 0$, $n^2 \lambda_{nk} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} in \mu_k$: fréquences hyperboliques
- Bien posé si $\Re(\lambda_k) > 0$ et $\mu_k \in \mathbb{R}$

Composantes de Fourier

$$(-B\partial_x^2 + A\partial_x)Xe^{inx} = n^2 \left(B + \frac{i}{n}A \right) Xe^{inx}$$

Spectre de $-B\partial_x^2 + A\partial_x$

$$\text{Sp}(-B\partial_x^2 + A\partial_x) = \left\{ n^2 \text{Sp} \left(B + \frac{i}{n}A \right) \right\}$$

Théorie perturbative

λ_{nk} valeurs propres de $B + \frac{i}{n}A$. Perturbation de B : $\lambda_{nk} \rightarrow \lambda_k \in \text{Sp}(B)$

- Si $\lambda_k \neq 0$, $n^2 \lambda_{nk} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n^2 \lambda_k$: fréquences paraboliques
- Si $\lambda_k = 0$, $n^2 \lambda_{nk} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} in \mu_k$: fréquences hyperboliques
- Bien posé si $\Re(\lambda_k) > 0$ et $\mu_k \in \mathbb{R}$
- Pas contrôlable en temps petit

Systemes parabolique-transport

Contrôlabilité en temps grand

Stratégie de contrôle

Découpler le système et contrôler



Stratégie de contrôle

Découpler le système et contrôler

- Pour u_h , trouver u_p qui contrôle les fréquences paraboliques en temps T



Stratégie de contrôle

Découpler le système et contrôler

- Pour u_h , trouver u_p qui contrôle les fréquences paraboliques en temps T

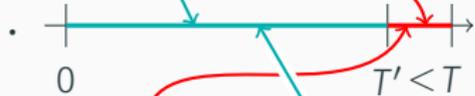


- Pour u_p , trouver u_h qui contrôle les fréquences hyperboliques en temps T

Stratégie de contrôle

Découpler le système et contrôler

- Pour u_h , trouver u_p qui contrôle les fréquences paraboliques en temps T



- Pour u_p , trouver u_h qui contrôle les fréquences hyperboliques en temps T
- Si les deux étapes concordent, OK (sauf un nombre fini de fréquences)
- Forcer les deux problèmes à s'accorder en choisissant u_p régulier et en utilisant l'alternative de Fredholm

Stratégie de contrôle

Découpler le système et contrôler

- Pour u_h , trouver u_p qui contrôle les fréquences paraboliques en temps T



- Pour u_p , trouver u_h qui contrôle les fréquences hyperboliques en temps T
- Si les deux étapes concordent, OK (sauf un nombre fini de fréquences)
- Forcer les deux problèmes à s'accorder en choisissant u_p régulier et en utilisant l'alternative de Fredholm
- Étape 1 : contrôle à zéro d'une équation parabolique en temps $T - T' > 0$
- Étape 2 : contrôle exact d'une équation hyperbolique en temps T' . Ok si $T' > T^*$

Systèmes de tailles arbitraires

- Stratégie décrite : Lebeau-Zuazua (1998) pour systèmes linéaires de thermoélasticité (onde-chaleur couplées)
- Notre travail : généralisation à des systèmes de tailles arbitraires

Systèmes de tailles arbitraires

- Stratégie décrite : Lebeau-Zuazua (1998) pour systèmes linéaires de thermoélasticité (onde-chaleur couplées)
- Notre travail : généralisation à des systèmes de tailles arbitraires
- Difficulté : valeurs propres et vecteurs propres de $B + \frac{i}{n}A$ se comportent mal lorsque $n \rightarrow +\infty$
- Solution : se passer de valeurs propres et de vecteurs propres
- Il suffit des *projections propres totales* : sommes de projections propres associées à des valeurs propres proches (théorie perturbative de Kato...)

$$-\frac{1}{2i\pi} \oint_{\Gamma} (M - z)^{-1} dz = \text{Projection sur les espaces propres associées à des valeurs propres de } M \text{ à l'intérieur de } \Gamma$$

Conclusion

Faible diffusion \implies pas contrôlable en général

- Chaleur fractionnaire peu diffusive : pas contrôlable
- Grushin : condition géométrique pour la contrôlabilité
Quantité importante : distance d'Agmon maximum entre $\{x = 0\}$ et ω ?
- Kolmogorov : condition géométrique pour la contrôlabilité

Équations peu diffusives et contrôle

Faible diffusion \implies pas contrôlable en général

- Chaleur fractionnaire peu diffusive : pas contrôlable
- Grushin : condition géométrique pour la contrôlabilité
Quantité importante : distance d'Agmon maximum entre $\{x = 0\}$ et ω ?
- Kolmogorov : condition géométrique pour la contrôlabilité

Problèmes ouverts

- Chaleur fractionnaire sur variété générale ? Termes d'ordres inférieurs ?
- Grushin : condition géométrique générale ? Phénomène sous-jacent ?
- Kolmogorov : condition géométrique générale ? Phénomène sous-jacent ?
- Équation parabolique dégénérée générale ?

Systemes parabolique-transport \simeq transport

- contrôlabilité dictée par les composantes de transport

Systèmes parabolique-transport \simeq transport

- contrôlabilité dictée par les composantes de transport

Problèmes ouverts

- domaine général?
- moins de contrôles que d'équations?
- coefficient non constants?
- ...

Merci!